

Aufgabengruppe A
A II

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$$f_k : x \mapsto x \cdot \left(\frac{x^2}{k} - k - 1 \right) \text{ mit } k \in \mathbf{R} \wedge k \neq 0 \text{ und } D_{f_k} = \mathbf{R}.$$

Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_k in Abhängigkeit von k . Geben Sie auch die zugehörigen Vielfachheiten an. (8 BE)

1.2 Begründen Sie (z.B. mit Hilfe von Aufgabe 1.1), für welchen Wert k_0 der zugehörige Graph einen Terrassenpunkt besitzt. (2 BE)

1.3 Bestimmen Sie die Werte von k so, dass der jeweils zugehörige Graph G_{f_k} durch den Punkt $P(-3 \mid 3)$ geht. (4 BE)

2.0 Nun sei $k = 3$. Man erhält die Funktion f_3 mit $f_3(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$.

2.1 Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen die Funktion f_3 echt monoton zunimmt bzw. abnimmt. Bestimmen Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte des Graphen. (6 BE)

2.2 Berechnen Sie die x -Koordinate desjenigen Punktes, in dem der Graph G_{f_3} die kleinstmögliche Steigung besitzt. Begründen Sie auch, warum es keinen Punkt gibt, in dem der Graph größtmögliche Steigung besitzt. (5 BE)

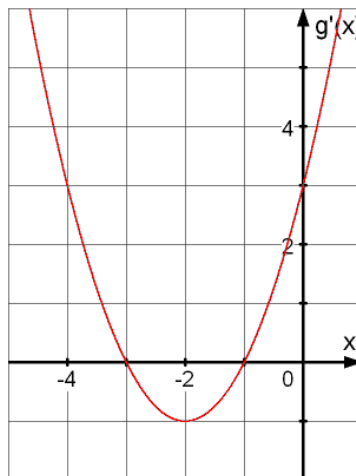
2.3 Geben Sie die Nullstellen von f_3 an und zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion für $-4 \leq x \leq 4$ in ein Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1cm. (5 BE)

2.4 Der Graph G_{f_3} und die x -Achse schließen im IV. Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (4 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung A II

- 3.0 Nebenstehende Zeichnung gibt den Graphen der Ableitungsfunktion g' einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades an:



- 3.1 Begründen Sie anhand der Zeichnung, an welcher Stelle (Abszisse) der Graph der Funktion g einen Hochpunkt, an welcher Stelle er einen Tiefpunkt und an welcher Stelle er einen Wendepunkt besitzt. (7 BE)
- 3.2 Berechnen Sie mit Hilfe geeigneter aus der Zeichnung abgelesener Punktkoordinaten den Funktionsterm $g'(x)$ und anschließend den Funktionsterm $g(x)$ derjenigen Funktion g , deren Wendepunkt auf der x -Achse liegt. (7 BE)
- 4.0 Die Gebührenordnung des Paketdienstes „Paket Ahoi“ enthält folgende Klausel: „Bei Päckchen in Zylinderform darf die Summe aus der Höhe h des Zylinders und dem Durchmesser d des Grundkreises 100 cm nicht überschreiten.“ Auf Einheiten wird im Folgenden verzichtet!
- 4.1 Berechnen Sie das Volumen $V(d)$ eines solchen Päckchens, wenn die in der Gebührenordnung erwähnte Summe genau 100 cm beträgt. Geben Sie auch eine geeignete Definitionsmenge an. (5 BE)
- [Mögliches Teilergebnis: $V(d) = \pi \cdot \left(25d^2 - \frac{1}{4}d^3 \right)]$
- 4.2 Bestimmen Sie nun die Maße desjenigen zylinderförmigen Päckchens, das dabei maximales Volumen aufweist. (7 BE)