2010 *Aufgabengruppe A*

A II

1.0 Der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades besitzt den Extrempunkt $E(4|0)$, schneidet die y-Achse im Punkt $(0|3)$ und hat an der Stelle $x_W = \frac{7}{3}$ einen Wendepunkt.

1.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$.

[Mögliches Ergebnis: $f(x) = \frac{3}{16}\left(x^3 - 7x^2 + 8x + 16\right)$] (9 BE)

1.2 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit Vielfachheiten. (5 BE)

1.3 Bestimmen Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen G_f auf zwei Nachkommastellen genau. (5 BE)

1.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-1,5 \le x \le 5$ mithilfe vorliegender und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm (4 BE)

2.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$g_a : x \mapsto \frac{1}{8}\left(ax^4 - 4x^3\right)$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$ und $D_{g_a} = \mathbb{R}$. Der Graph wird mit G_{g_a} bezeichnet.

2.1 Ermitteln Sie die Koordinaten sämtlicher Punkte mit waagrechter Tangente des Graphen G_{g_a} und deren Art. (7 BE)

2.2 Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle und die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen G_{g_a}. (7 BE)

2.3 Berechnen Sie a so, dass die Graphen G_f aus Teilaufgabe 1.1 und G_{g_a} bei $x = 4$ einen gemeinsamen Punkt besitzen. (2 BE)

[Ergebnis: $a = 1$]

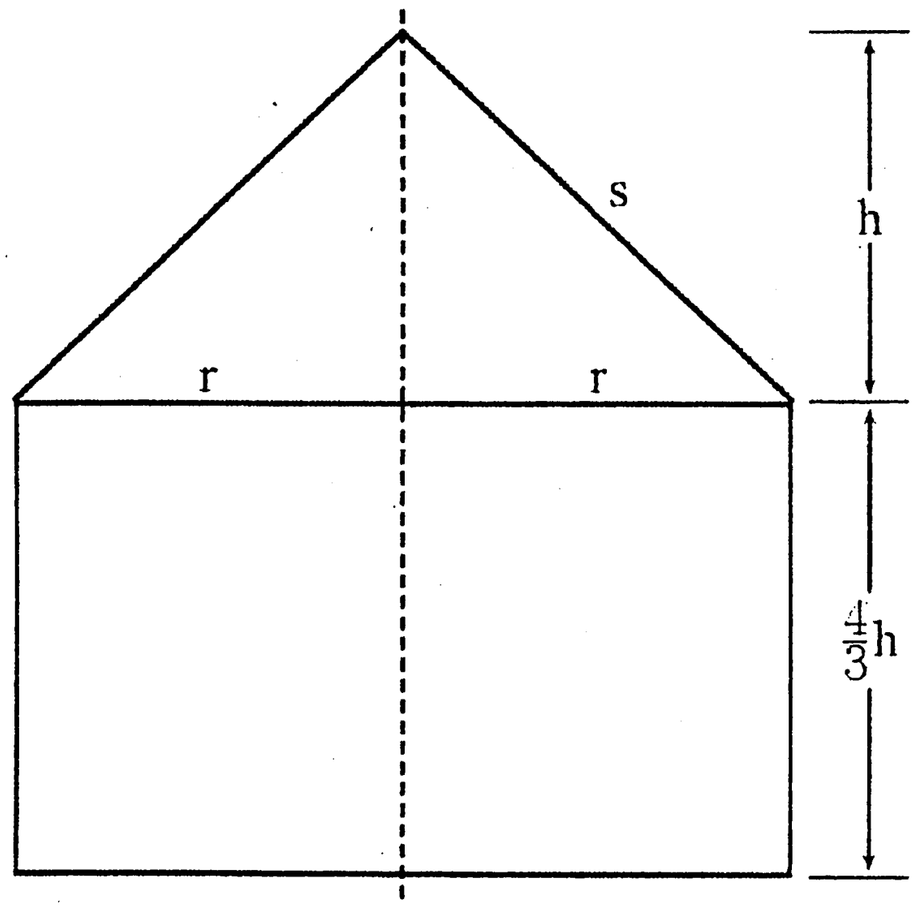
2.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g_1 mit $g_1(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3$ im Bereich $-1,5 \le x \le 4,5$ mit Hilfe vorliegender Ergebnisse in das vorhandene Koordinatensystem ein. (4BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung A II

2.5 Die Graphen G_f und G_{g_1} schließen im 1. und 4. Quadranten zusammen mit der y-Achse ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts. (5 BE)

3.0 Eine Biogasanlage besteht aus einem zylinderförmigen, oben offenen Grundkörper, das Dach der Höhe h ist kegelförmig (siehe nebenstehende Skizze des Querschnitts). Die Mantellänge s des Kegels beträgt 15 m. Die folgenden Rechnungen werden ohne Einheiten durchgeführt.



3.1 Stellen Sie die Maßzahl V des Volumens der gesamten Biogasanlage in Abhängigkeit von der Höhe h dar und geben Sie eine im gegebenen Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge der Funktion $V: h \mapsto V(h)$ an. (6 BE)

[Mögliches Teilergebnis: $V(h) = \left(375h - \frac{5}{3}h^3\right) \cdot \pi$]

3.2 Berechnen Sie h so, dass das Volumen den absolut größten Wert annimmt. Runden Sie dabei nicht. Bestimmen Sie auf den nächsten ganzzahligen Wert gerundet den Wert V_{max} des maximalen Volumens. (6 BE)