Musterlösung Analysis AI

① $f_a(x) = \frac{1}{12}(x^3 - 2ax^2 + a^2x)$ mit $a \geq 0$

5 (1.1) $\frac{1}{12}x(x^2 - 2ax + a^2) = \frac{1}{12}x(x-a)^2 = 0$ ✓ ✓ $x_1 = 0$ ✓ $x_{2/3} = a$ ✓

1. Fall: $a = 0$ ✓ $x_{1/2/3} = 0$ dreifach ✓

2. Fall: $a > 0$ $x_1 = 0$ einfach ✓ $x_{2/3} = a$ doppelt ✓

9 (1.2) $f_a'(x) = \frac{1}{12}(3x^2 - 4ax + a^2)$ ✓ $f_a''(x) = \frac{1}{12}(6x - 4a)$ ✓

$f_a'(x) = 0 \iff x_{1/2} = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 12a^2}}{6} = \frac{4a \pm 2a}{6}$ ✓ $x_1 = a$ ✓ $x_2 = \frac{a}{3}$ ✓

$f_a''(a) = \frac{1}{12}(6a - 4a) = \frac{a}{6}$ ✓ > 0 für $a > 0 \Rightarrow$ Min ✓ $(a/0)$

oder Monotonietabelle $= 0$ für $a = 0$ ✓ $\Rightarrow$ TeP $(0/0)$ ✓

$f_a''(\frac{a}{3}) = \frac{1}{12}(-2a) < 0$ ✓ für $a > 0 \Rightarrow$ HP ✓ $(\frac{a}{3}/\frac{a^3}{81})$ ✓

6 (1.3) $f_6(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x$ $f_6'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$ ✓ $f_6''(x) = \frac{1}{2}x - 2$ ✓

WP $f_6''(x) = 0 \iff \frac{1}{2}x - 2 = 0$ ✓ $x = 4$ ✓ $W(4 / \frac{4}{3})$ ✓

(einfache NSt von $f''(x) \Rightarrow$ WP existiert ✓)

x	$-\infty < x < 4$	4	$4 < x < \infty$
$f_6''(x)$	$-$	0	$+$

✓

G_f rechtsgekrümmt für $x \in]-\infty; 4]$ ✓

G_f linksgekrümmt für $x \in [4; \infty[$

4 (1.4) Graph HP ✓ TP ✓ WP ✓ Randwerte ✓

3 (1.5) Ursprungsgerade zeichnen ✓ $t = 0$ ✓ $y = mx$ ✓

HP $(2/\frac{8}{3})$ $\frac{8}{3} = 2m \Rightarrow m = \frac{4}{3}$ ✓ $y = \frac{4}{3}x$ ✓

(1.6) $A = A_1 + A_2$ $A_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$ ✓

6 $A_2 = \int_2^6 f(x)\,dx = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \Big|_2^6 = F(6) - F(2) = \frac{16}{3}$ ✓ ✓ ✓ ✓

$A = \frac{8}{3} + \frac{16}{3} = \frac{24}{3} = 8$ ✓ Markierung ✓

3 Fläche von 0 bis 6

2 Fläche zw. beiden Funktionen

(1.7) $h(x)=\begin{cases} h_1(x)=\frac{4}{3}x & \text{für } x<3 \\ h_2(x)=\frac{1}{12}x^3-x^2+3x & \text{für } x\geq 3\end{cases}$

G_h farbig markieren ✓ Sprungstelle (nicht zshg) ⇒ nicht stetig ✓
nicht diff'bar

$h_1(x)$, $h_2(x)$ stetig und diff'bar für $x\in\mathbb{R}$ ✓ 6

$h_1(3)=4$ ✓, $h_2(3)=\frac{4}{9}$ ✓ $\}$ $h_1(3)\neq h_2(3) \Rightarrow$ nicht stetig
($\Rightarrow$ nicht diff'bar)

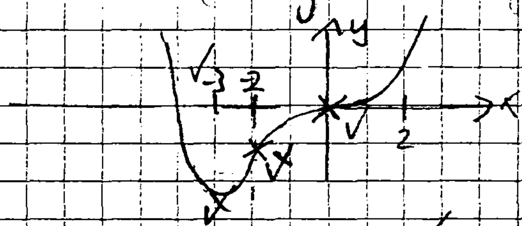
(2.1) $k''(x)>0$: linksgekrümmt
$k''(x)<0$: rechtsgekrümmt

Graph ist linksgekrümmt ✓ für $x\in\,]-\infty;-2]$ bzw $x\in[0;\infty[$ ✓
Graph " rechts " ✓ für $x\in[-2;0]$ ✓ 5

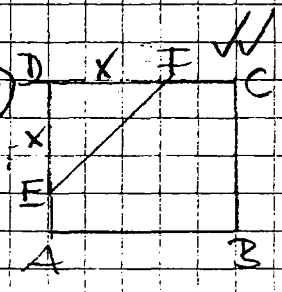
VZW von $k''(x)$ bei $x=-2$ und $x=0$ ⇒ Wendepunkte ✓

bei $x=0$ TEP ✓ (waagerechte Tangente ✓)

(2.2) Skizze 3



(3.1)



3. 2

(3.2) $V=\frac{1}{3}G\cdot h$ ✓ $h=\frac{\sqrt{2}}{2}x$ (gegeben)
$0<x<a$
$G=a^2-\frac{1}{2}x^2$ ✓✓ 4

$V_a(x)=\frac{1}{3}\left(a^2-\frac{1}{2}x^2\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x=\frac{\sqrt{2}}{6}\left(a^2x-\frac{1}{2}x^3\right)$ ✓ $=\frac{\sqrt{2}}{12}\left(-x^3+2a^2x\right)$

(3.3) $V_a'(x)=\frac{\sqrt{2}}{12}\left(-3x^2+2a^2\right)$ ✓ $V_a''(x)=\frac{\sqrt{2}}{12}(-6x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}x$ ✓

$V_a'(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+2a^2=0$ ✓ $x^2=\frac{2}{3}a^2$ $x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}a$ ✓ $=\frac{\sqrt{6}}{3}a$ 7
$x_2=-\sqrt{\frac{2}{3}}a$ keine Lsg ✓

$V_a''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a\right)=\frac{\sqrt{2}}{12}\left(-6\sqrt{\frac{2}{3}}a\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}a<0 \Rightarrow$ Max ✓

maximales Volumen für $a=3$: bei $x=\sqrt{6}$ $h=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{3}$
$V_3(\sqrt{6})=\frac{1}{3}(9-3)\cdot\sqrt{3}=2\cdot\sqrt{3}$ ✓

Σ 60 BE