Aufgabengruppe A

A I

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{1}{12}(x^3 - 2ax^2 + a^2x)$ mit $x, a \in \mathbb{R}$ und $a \geq 0$.

1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f_a sowie deren Vielfachheit in Abhängigkeit von a. (5 BE)

1.2 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a Art und Koordinaten der Punkte des Graphen von f_a mit waagrechter Tangente. (9 BE)

Für alle folgenden Teilaufgaben ist a = 6: $f_6(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x$

f_6 wird im Folgenden kurz mit f bezeichnet.

1.3 Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle und berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen G_f. (6 BE)

1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f für $-1 \leq x \leq 8$ in ein Koordinatensystem. (4 BE)

1.5 Gegeben ist weiterhin die Ursprungsgerade G_g, welche den Graphen G_f im Hochpunkt $HP(2 \mid y_{HP})$ schneidet. Zeichnen Sie die Gerade in das vorhandene Koordinatensystem ein und bestimmen Sie ihre Gleichung. (3 BE)

1.6 Die Gerade G_g, die x-Achse und der Graph von f schließen im I. Quadranten ein Flächenstück ein. Markieren Sie diese Fläche im vorhandenen Koordinatensystem und berechnen Sie die zugehörige Flächenmaßzahl. (6 BE)

1.7 Gegeben ist nun die abschnittsweise definierte Funktion h durch

$$h(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x & \text{für } x < 3 \\ f(x) & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

Markieren Sie G_h im vorhandenen Diagramm mit Farbe. Treffen Sie mithilfe des Graphen G_h eine Aussage über Stetigkeit und Differenzierbarkeit von h an der Nahtstelle. Belegen Sie anschließend Ihr Ergebnis rechnerisch. (6 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung A I

2.0 Von einer ganzrationalen Funktion k mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$ ist Folgendes bekannt:

$k''(x) > 0$ für $x \in]-\infty;-2[$ sowie für $x \in]0;\infty[$

$k''(x) < 0$ für $x \in]-2;0[$

$k'(0) = 0 \wedge k''(0) = 0 \wedge k'''(0) \neq 0$

2.1 Beschreiben Sie die daraus resultierenden Eigenschaften des Graphen G_k in Worten. (5 BE)

2.2 Fertigen Sie mithilfe der bisherigen Angaben und Ergebnisse eine aussagekräftige Skizze von G_k an, wenn der Graph durch den Ursprung verläuft, einen Tiefpunkt bei $x = -3$ besitzt und die Funktion k den Grad 4 hat. (3 BE)

3.0 Bei einem Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a wird von der Ecke D ausgehend je eine Strecke der Länge x mit $0 < x < a$ in Richtung A bis zum Punkt E und in Richtung C bis zum Punkt F abgetragen. Dann wird das Quadrat längs EF so gefaltet, dass das Dreieck FDE senkrecht zum ursprünglichen Quadrat steht. Die hochstehende Ecke D bildet mit den Punkten A, B, C, F und E eine Pyramide mit fünfeckiger Grundfläche.

3.1 Fertigen Sie eine Skizze des Quadrates ABCD mit den in 3.0 gegebenen Punkten und Strecken an. (2 BE)

3.2 Stellen Sie das Volumen $V_a(x)$ der entstehenden Pyramide in Abhängigkeit von x dar. Die Höhe der Pyramide h ist gegeben durch $h = \frac{\sqrt{2}}{2}x$. (4 BE)

[Mögliches Ergebnis: $V_a(x) = \frac{\sqrt{2}}{12}(2a^2x - x^3)$]

3.3 Bestimmen Sie x so, dass das Volumen der Pyramide den absolut größten Wert annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall und mit a = 3 Volumen und Höhe der Pyramide. (7 BE)