Aufgabengruppe A

A II

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{9}{8}x + \frac{4}{5}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

1.1 Zeigen Sie, dass G_f für $x = \frac{5}{2}$ einen Punkt mit waagrechter Tangente besitzt. Bestimmen Sie mithilfe der maximalen Monotonieintervalle Art und Koordinaten aller Punkte auf G_f mit waagrechter Tangente. (8 BE)

1.2 Ermitteln Sie die Koordinaten aller Wendepunkte von G_f auf zwei Nachkommastellen gerundet. (4 BE)

1.3 Begründen Sie, dass f im Intervall $I =]3;4[$ genau eine Nullstelle x_0 besitzt. Ermitteln Sie ein Intervall $I_0 \subset I$ der Länge $\Delta x = 0{,}25$, das diese Nullstelle x_0 enthält. (5 BE)

1.4 Weisen Sie durch Rechnung nach, dass sich die Graphen der Funktionen f und g, mit $g: x \mapsto -\frac{9}{8}x$ und $D_g = \mathbb{R}$, für $x = \pm 2$ berühren. Berechnen Sie die Koordinaten der Berührpunkte. (6 BE)

1.5 Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und g im Bereich $-3 \le x \le 4$, auch unter Verwendung vorliegender Ergebnisse, in ein kartesisches Koordinatensystem. (6 BE)

1.6 Die Graphen G_f und G_g schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (4 BE)

2 Gegeben ist die allgemeine ganzrationale Funktion u vierten Grades durch $u(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $a, b, c, d, e, x \in \mathbb{R}$ und $a \ne 0$.
Geben Sie ohne Begründung und ohne Rechnung einen Überblick, wie viele Nullstellen (Anzahl und Vielfachheit!) die Funktion u haben kann. (4 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung A II

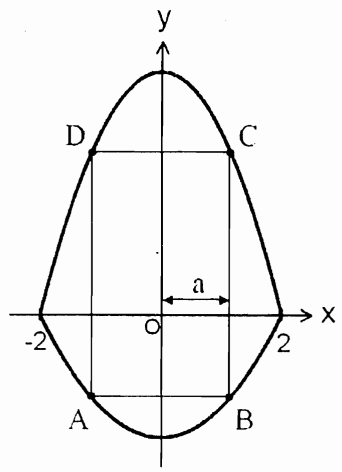
3.0 Gegeben sind mit dem Parameter $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $D_{h_k} = \mathbb{R}$ die quadratischen Funktionen $h_k : x \mapsto kx^2 + (2k-1)\cdot x + \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{4k}$.

3.1 Untersuchen Sie, für welchen Parameterwert k der Graph von h_k symmetrisch zum Koordinatensystem ist. Erläutern Sie Ihr Vorgehen. (3 BE)

3.2 Weisen Sie nach, dass $D = -k^3 + 4k^2 - 4k$ die Diskriminante der Gleichung $h_k(x) = 0$ ist. (4 BE)

3.3 Bestimmen Sie nun diejenigen Werte k, für die die quadratische Funktion h_k mindestens eine Nullstelle besitzt. (5 BE)

4.0 Die Graphen der reellen Funktionen p und q mit $p(x) = -x^2 + 4$ und $q(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ und mit $D_p = D_q = [-2;2]$ bilden die nebenstehend abgebildete Fläche. Darin einbeschrieben ist das Rechteck ABCD, dessen Eckpunkte auf den Graphen der Funktionen p und q liegen.



4.1 Bestimmen Sie die Maßzahl A(a) der Fläche des Rechtecks in Abhängigkeit von a und geben Sie eine sinnvolle maximale Definitionsmenge D_A an. (4 BE)
[Mögliches Teilergebnis: $A(a) = -3a^3 + 12a$]

4.2 Bestimmen Sie a so, dass die zugehörige Fläche maximalen Inhalt annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall die Maßzahlen für die Fläche, Breite und Länge des Rechtecks. (7 BE)