Aufgabengruppe A

A II 2015

1.0 Gegeben sind die ganzrationalen Funktionen
$f_a : x \mapsto a \cdot (x^3 + 2x^2 - 7x + 4)$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

1.1 Zerlegen Sie $f_a(x)$ in Linearfaktoren und geben Sie die Nullstellen der Funktion f_a mit der jeweiligen Vielfachheit an. (6 BE)

1.2 Berechnen Sie den Wert von a so, dass die Tangente an den Graphen der Funktion f_a an der Stelle $x = -3$ die y-Achse bei $y = 5$ schneidet. (5 BE)

2.0 Nun wird $a = \frac{1}{8}$ gesetzt. Die Funktion $f_{1/8}$ wird im Folgenden mit f bezeichnet.
Es gilt: $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 + 2x^2 - 7x + 4)$.

2.1 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f. (7 BE)

2.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P, in dem der Graph der Funktion f am stärksten fällt. (4 BE)

2.3 Zeichnen Sie unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse den Graphen von f im Bereich $-5 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (4 BE)

3.0 Gegeben ist ferner die quadratische Funktion p mit $p''(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

3.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$, wenn der Punkt $A(-4 \mid 8)$ auf der Parabel G_p und ihr Scheitel bei $x_S = -\frac{1}{8}$ liegt. (5 BE)
[Mögliches Ergebnis: $p(x) = \frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{4}x + 1)$]

3.2 Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen der Funktionen p und f (mit f aus 2.0) und zeichnen Sie die Parabel G_p für $-4 \le x \le 4$ in das vorhandene Koordinatensystem ein. (9 BE)

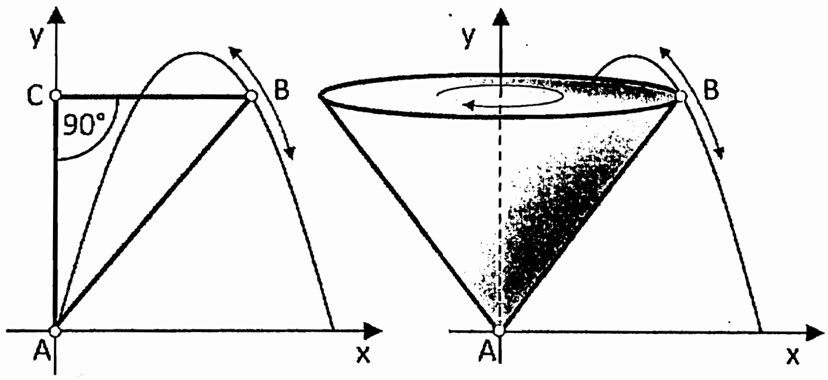
3.3 Geben Sie die Lösung der Ungleichung $p(x) - f(x) > 0$ an und erläutern Sie, was das Ergebnis für die Graphen G_f und G_p bedeutet. (2 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung A II

3.4 Die Graphen G_f und G_p schließen im II. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts. (5 BE)

4.0 Das Dreieck ABC in nebenstehender Abbildung rotiert um die y-Achse, und dabei entsteht ein Kegel. Der Punkt A ist der Urspung des Koordinatensystems und der Punkt B liegt im I. Quadranten auf der Parabel G_q mit $q(x) = -x^2 + 8x$ und $x \in \mathbb{R}$.



4.1 Stellen Sie eine Gleichung $V(r)$ für das Volumen des Kegels auf, wobei $r = \overline{BC}$ der Radius des Kegels ist. (3 BE)

[Mögliches Ergebnis: $V(r) = -\frac{1}{3}\pi r^4 + \frac{8}{3}\pi r^3$]

4.2 Ermitteln Sie die maximale sinnvolle Definitionsmenge D_V der Funktion $V: r \mapsto V(r)$. (3 BE)

4.3 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B so, dass das Kegelvolumen seinen absolut größen Wert annimmt, und berechnen Sie das maximale Kegelvolumen. (7 BE)