

Analysis AI 2016

1.0. $f(x) = -\frac{1}{4}(x^3 + 8x^2 + 16x)$ $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

1.1. $f(x) = 0 \quad x(x^2 + 8x + 16) = 0 \checkmark \quad x_1 = 0 \text{ einfach } \checkmark$
 $x(x+4)^2 = 0 \quad x_{2/3} = -4 \text{ doppelt } \checkmark \quad (4)$

1.2. $f'(x) = -\frac{1}{4}(3x^2 + 16x + 16) \checkmark$

$f'(x) = 0 \quad 3x^2 + 16x + 16 = 0 \checkmark \quad D = 16^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16 = 64$

$x_{1/2} = \frac{-16 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{-16 \pm 8}{6}$

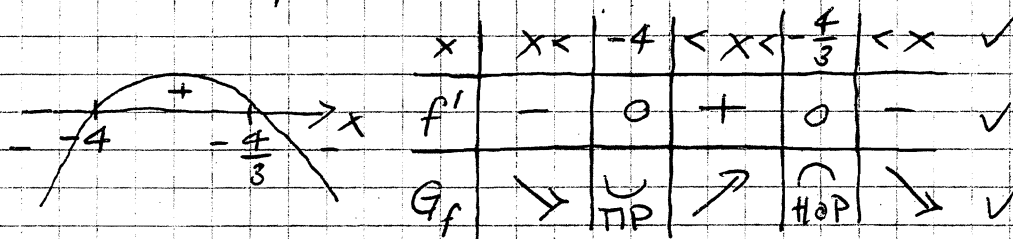
$x_1 = -\frac{4}{3} \checkmark$

$x_2 = -4 \checkmark$

$f(-\frac{4}{3}) = \frac{64}{27} \checkmark$

$f(-4) = 0$

Skizze zu f'



TIP $(-4 | 0)$: HOP $(-\frac{4}{3} | \frac{64}{27})$

G_f ist wmf für $x \in]-\infty; -4]$

G_f ist wmf für $x \in [-4; -\frac{4}{3}]$ $\checkmark$

G_f ist wmf für $x \in [-\frac{4}{3}; +\infty[$

(8)

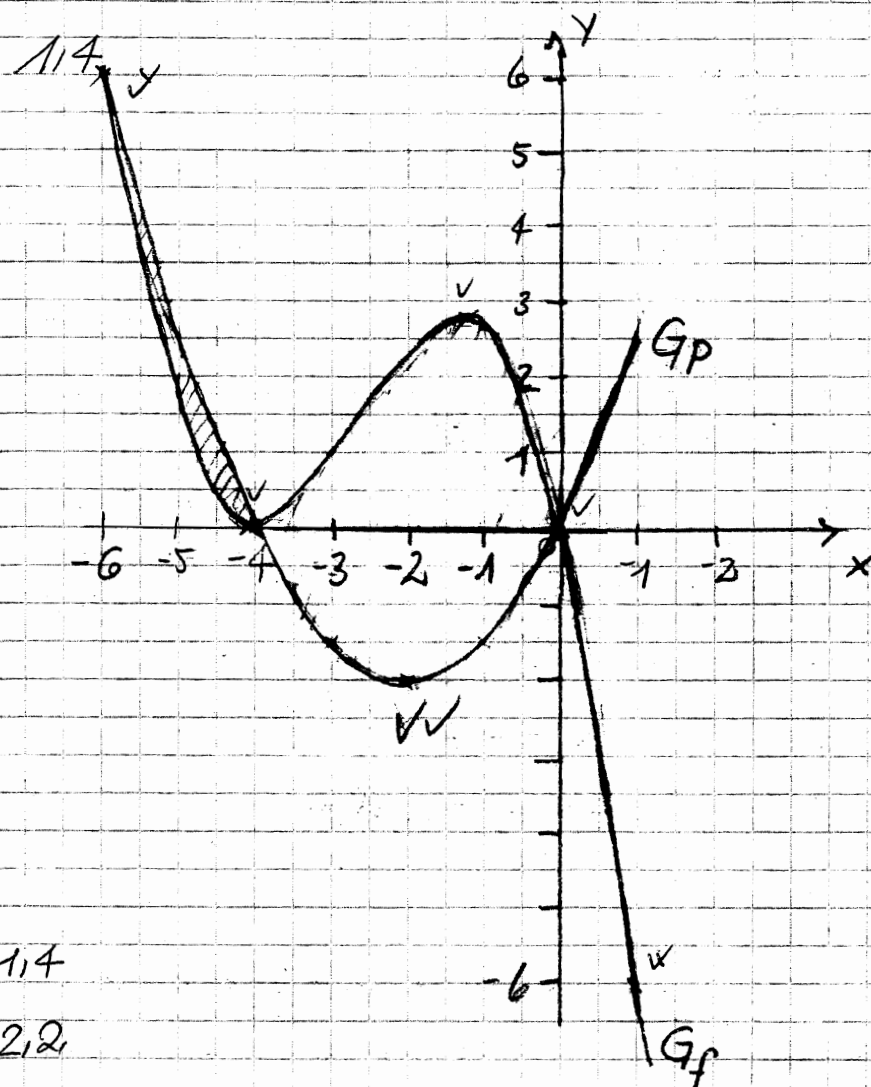
1.3. $f''(x) = -\frac{1}{4}(6x + 16) \checkmark$

$f''(x) = 0 \quad 6x + 16 = 0 \checkmark \quad x = -\frac{8}{3} \checkmark$

enf. Nullstelle $\Rightarrow$ WP existiert $\left. \begin{array}{l} -4 < -\frac{8}{3} < -\frac{4}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{max. Steigung bei } x = -\frac{8}{3} \checkmark$

$f'(-\frac{8}{3}) = -\frac{1}{4} \cdot (3 \cdot (-\frac{8}{3})^2 + 16(-\frac{8}{3}) + 16) = \frac{4}{3} \checkmark$

(5)



④

1,4

②

2,2

2.1. $f(x) = ax^2 + bx + c$

A(-6|6): $f(-6) = 6$ $36a - 6b + c = 6$ ✓

B(-2|2): $f(-2) = -2$ $4a - 2b + c = -2$ ✓ / : -1

C(1|2,5): $f(1) = 2,5$ $a + b + c = 2,5$ ✓

$$\begin{array}{rcl} 36a - 6b + c = 6 & \downarrow + & \\ -4a + 2b - c = 2 & \downarrow + & \\ \hline a + b + c = 2,5 & & \end{array}$$

$32a - 4b = 8$ ✓ / : 4

$-3a + 3b = 4,5$ ✓ / : 3

$-0,5 + b = 1,5$

$b = 2$ ✓

$0,5 + 2 + c = 2,5$

$c = 0$ ✓

$8a - b = 2$ ✓

$-a + b = 1,5$ ✓

$7a = 3,5$

$a = 0,5$ ✓

⑦

⇒ $p(x) = 0,5x^2 + 2x$ ✓

2.3 Markierung ✓

$$\int_{-6}^{-4} (p(x) - f(x)) dx$$

$$\int_{-6}^{-4} \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{4}x^3 + 2x^2 + 4x \right) dx$$

$$\int_{-6}^{-4} \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x \right) dx = \left[\frac{1}{16}x^4 + \frac{5}{6}x^3 + 3x^2 \right]_{-6}^{-4}$$

$$\frac{1}{16} \cdot (-4)^4 + \frac{5}{6} \cdot (-4)^3 + 3 \cdot (-4)^2 - \left(\frac{1}{16} \cdot (-6)^4 + \frac{5}{6} \cdot (-6)^3 + 3 \cdot (-6)^2 \right)$$

$$10 \frac{2}{3} - 9 = 1 \frac{2}{3} \text{ FE}$$

⑥

3.0. $k_2(x) = \frac{1}{4}x(x-1)(x+4)(x-3)$

3.1. Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{3}\}$

$$\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{t} \\ x_3 = -4 \\ x_4 = 3 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{t} \\ x_3 = -4 \\ x_4 = 3 \end{array}} \right\} 4 \text{ Nullstellen}$$

Für $t = -\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_{2/3} = -4 \\ x_4 = 3 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_{2/3} = -4 \\ x_4 = 3 \end{array}} \right\} 3 \text{ Nullstellen}$$

Für $t = 0$

$$\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = 3 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = 3 \end{array}} \right\} 3 \text{ Nullstellen}$$

Für $t = \frac{1}{3}$

$$\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -4 \\ x_{3+} = 3 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -4 \\ x_{3+} = 3 \end{array}} \right\} 3 \text{ Nullstellen}$$

⑦

3.2. Graph 1: aufgrund der Nullstellen: $t = 0$

$\Rightarrow$ Leitkoeffizient $a_n = -\frac{1}{4} \Rightarrow$ für $x \rightarrow -\infty$ $f(x) \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow$ stimmt mit Graph überein

Graph 2: $t = -\frac{1}{2}$ (aufg. der 1.1.) $\Rightarrow a_n < 0 \Rightarrow$ für $x \rightarrow -\infty$ $f(x) \rightarrow -\infty \rightarrow$ ja

⑥

Graph 3: doppelte ist bei $x=0$ nicht möglich ✓
⇒ nein ✓

$$4.1. V = R^2 \cdot \pi \cdot h - \pi \cdot (R-10)^2 \cdot (h-10) \quad \checkmark$$

Nebenbed. $R+h=90 \quad \checkmark$

$$h = 90 - R \quad \checkmark$$

$$V(R) = R^2 \cdot \pi \cdot (90 - R) - \pi \cdot (R-10)^2 \cdot (90 - R - 10) \quad \checkmark$$

$$= \pi [90R^2 - R^3 - (R^2 - 20R + 100)(80 - R)] \quad \checkmark$$

$$= \pi [90R^2 - R^3 - 80R^2 + R^3 + 1600R - 20R^2 - 8000 + 100R] \quad \checkmark$$

⑥

$$= \pi [-10R^2 + 1700R - 8000] \quad \checkmark$$

$$4.2. V'(R) = \pi \cdot (-20R + 1700) \quad \checkmark$$

$$V'(R) = 0$$

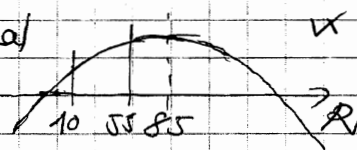
$$-20R + 1700 = 0 \quad \checkmark$$

$$R = 85 \notin D \quad \checkmark$$

Randbereichuntersuchung.

(Skizze zu $V(R)$)

Für $R = 55$ ist V in D maximal
(siehe Skizze)



⑤

$$h = 90 - 55 = 35 \text{ cm} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \text{max. Fullhöhe } 35 - 10 = 25 \text{ cm} \quad \checkmark$$

Alternativen zu 3d und 4i)

$$t=0 \Rightarrow h_0(x) = -\frac{1}{4}x(x+4)(x-3) \Rightarrow x_1=0 \quad x_2=-4 \quad x_3=3 \quad (3.1)$$

$$t \neq 0 \Rightarrow x_1=0 \quad x_2=-4 \quad x_3=3 \quad x_4=\frac{1}{t} \quad (t \neq -\frac{4}{3})$$

$$\left. \begin{array}{l} t = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = -4 \text{ doppelt} \\ t = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 3 \text{ doppelt} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{jeweils nur 3 Nullstellen}$$

Graph I zu $t=0$ da a negativ und Nst. $-4; 0; 3$

Graph II zu $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_4 = -2$ und a negativ

Graph III nicht, da $x=0$ doppelt nicht möglich

$$\text{Boden: } V = R^2 \pi \cdot 10 \quad (4.1)$$

$$\text{Wand: } V = (R^2 \pi - (R-10)^2 \pi) \cdot (h-10)$$

$$\text{Nebenbed. } R+h=90 \Rightarrow h=90-R$$

$$\begin{aligned} V &= R^2 \pi \cdot 10 + (R^2 \pi - (R^2 - 20R + 100) \pi) \cdot (80 - R) \\ &= R^2 \pi \cdot 10 + (+20R\pi - 100\pi)(80 - R) \\ &= R^2 \pi \cdot 10 - 20R^2 \pi + 1600R\pi + 100R\pi - 8000\pi \\ &= \pi(-10R^2 + 1700R - 8000) \end{aligned}$$

$$V'(R) = \pi(-20R + 1700) = 0 \Rightarrow R = 85 \notin \text{ID!} \quad (4.2)$$

V nach unten offene Parabel; steigt bis $R=85$

$\Rightarrow$ Maximum bei $R=55$

$\Rightarrow h=35 \Rightarrow \text{Füllhöhe } 25 \text{ (cm)}$