A II

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{3}{16}(x+3)(x+\frac{4}{3})(4-x)$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an. (3 BE)

1.2 Zeigen Sie, dass sich f(x) auch in der Form $f(x) = -\frac{1}{16}(3x^3 + x^2 - 40x - 48)$ darstellen lässt. (3 BE)

1.3 Ermitteln Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen G_f. (6 BE)

1.4 Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $-4 \leq x \leq 4$, auch unter Verwendung vorliegender Ergebnisse, in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1cm. (4 BE)

1.5 Berechnen Sie die Steigung der Tangente an den Graphen G_f im Schnittpunkt mit der y-Achse. Bestimmen Sie dann den Bereich, in dem die Steigung des Graphen G_f größer ist als die berechnete Tangentensteigung. (6 BE)

1.6 Die Parabel P ist der Graph der quadratischen Funktion p. $S(-4\,|\,4)$ ist der Hochpunkt von P und zugleich Schnittpunkt von P mit G_f. Ein weiterer Schnittpunkt der beiden Graphen liegt auf der y-Achse. Ermitteln Sie den Funktionsterm von p und zeichnen Sie die Parabel P im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ in das Koordinatensystem ein. (6 BE)

[Mögliches Teilergebnis: $p(x) = -\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$]

1.7 Die Graphen G_f und P schließen zwei Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächenstücks, das im II. und III. Quadranten des Koordinatensystems liegt. (5 BE)

2.0 Gegeben ist die Funktionenschar $g_a: x \mapsto 0{,}25(x^3 - 2ax^2)$ mit $x, a \in \mathbb{R}$.

Der Graph von g_a wird mit G_a bezeichnet.

2.1 Ermitteln Sie die Nullstellen von g_a und geben Sie deren Vielfachheit in Abhängigkeit von a an. (5 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung A II

2.2.0 Nun wird $a = 3$ gesetzt und es gilt: $g_3(x) = 0{,}25(x^3 - 6x^2)$. Des Weiteren ist die lineare Funktion $t: x \mapsto -3x + 2$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

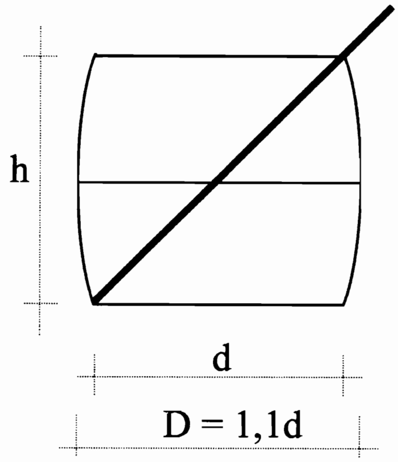
2.2.1 Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von G_3. (4 BE)

2.2.2 Untersuchen Sie rechnerisch, ob die abschnittsweise definierte Funktion

$h: x \mapsto \begin{cases} g_3(x) & \text{für } x \leq 2 \\ t(x) & \text{für } x > 2 \end{cases}$ an der Nahtstelle differenzierbar ist. (5 BE)

2.2.3 Beschreiben Sie mithilfe der Ergebnisse der letzten beiden Teilaufgaben die besondere Lage des Graphen der linearen Funktion t in Bezug auf G_3. (2 BE)

3.0 Ein symmetrischer Trinkjoghurtbecher in der Form eines Fasses besitzt das Volumen $V = \frac{1}{12}\pi \cdot h \cdot (2D^2 + d^2)$. Hierbei ist d jeweils der Durchmesser des Deckels und des Bodens und D der maximale Durchmesser des Bechers auf halber Höhe (alle Längen in cm gemessen). Weiterhin soll D 10% größer sein als d. Der Becher soll so konstruiert sein, dass ein 13 cm langer Strohhalm genau um 3 cm aus dem Becher herausragt, wenn er diagonal im Becher liegt (siehe Abbildung).



3.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf, die die Maßzahl des Bechervolumens in Abhängigkeit von der Höhe h beschreibt. (4 BE)

[Mögliches Ergebnis: $V(h) = \frac{57}{200}\pi \cdot (-h^3 + 100h)$]

3.2 Mit der Vorgabe $5 \leq h \leq 9$ soll der Becher für eine kostenlose Probe das geringste Volumen aufweisen. Berechnen Sie für diesen Fall die Höhe h in cm und das zugehörige Volumen in cm³ auf eine Nachkommastelle gerundet. (7 BE)