A II

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{5}(x^4 - 8x^3 + 18x^2)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

Der Graph wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von G_f bezüglich des Koordinatensystems und geben Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \to -\infty$ und für $x \to \infty$ an. (3 BE)

1.2 Zeigen Sie, dass die Funktion f genau eine Nullstelle besitzt und geben Sie diese samt Vielfachheit an. (3 BE)

1.3 Begründen Sie nur mithilfe der Ergebnisse aus 1.1 und 1.2, dass an der Stelle $x = 0$ ein relatives und zugleich absolutes Minimum von f vorliegen muss. (3 BE)

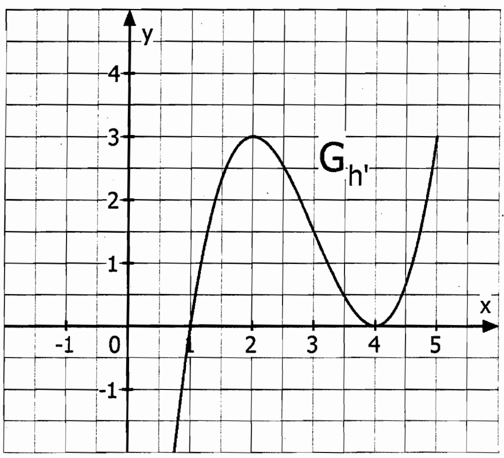
1.4 Zeigen Sie, dass an den Stellen $x = 1$ und $x = 3$ Wendestellen von f liegen. Ermitteln Sie auch die Koordinaten der zugehörigen Punkte und welcher der beiden Punkte ein Terrassenpunkt ist. (7 BE)

1.5 Die Wendepunkte aus Teilaufgabe 1.4 legen die Gerade G_g fest. Ermitteln Sie deren Gleichung. (3 BE)

1.6 Zeichnen Sie die Graphen G_f und G_g unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse im Bereich $-1 \leq x \leq 4{,}5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm. (5 BE)

1.7 Die Graphen G_f und G_g schließen drei endliche Flächenstücke ein. Schraffieren Sie das mittlere Flächenstück in Ihrer Zeichnung von Aufgabe 1.6 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhaltes. (5 BE)

2 Gegeben ist der Graph der 1. Ableitung h' der Funktion h mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$.



Bestätigen oder widerlegen Sie begründet folgende Aussagen:

a) G_h hat einen Tiefpunkt bei $x = 1$.

b) G_h hat einen Tiefpunkt bei $x = 4$.

c) G_h hat einen Wendepunkt bei $x = 2$.

d) Die Tangente an den Graphen G_h in $x = 2$ verläuft parallel zur Geraden e mit der Gleichung $y = 3x + 7$. (8 BE)

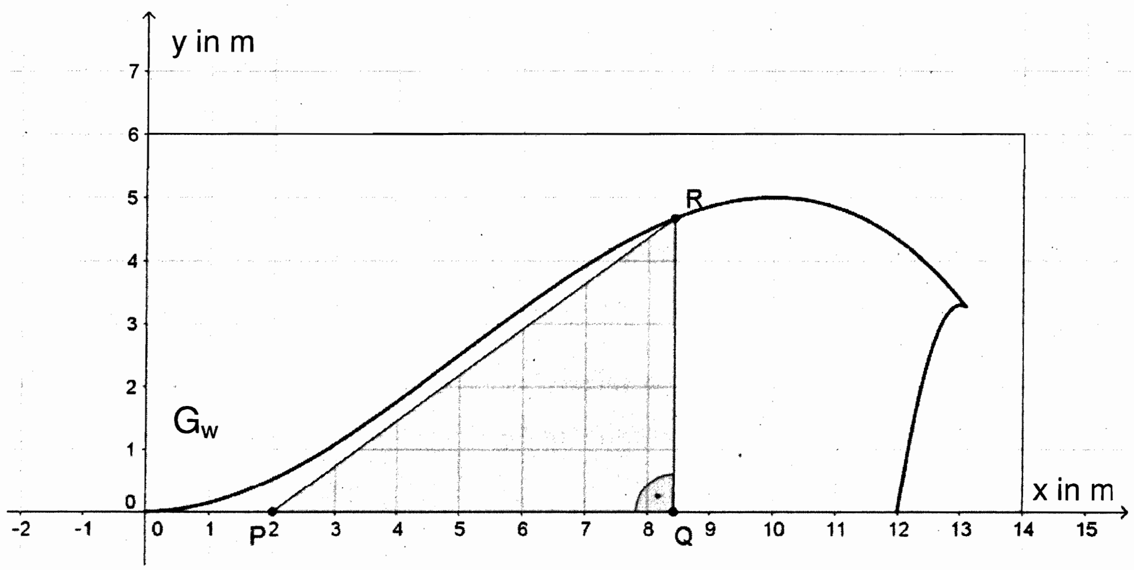
Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung A II

3 Gegeben sind die reellen Funktionen $k_a : x \mapsto \frac{1}{9}(x^4 - 2ax^3)$ mit $x, a \in \mathbb{R}$ und $a \geq 0$.

Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte der zugehörigen Graphen G_{k_a} in Abhängigkeit von a. (9 BE)

4.0 Auf der Außenwand eines neuen Hallenbades soll dessen Logo, eine Welle, abgebildet werden. Der Architekt möchte ein großes Fenster in Form eines rechtwinkligen Dreiecks (siehe Skizze ΔPQR) innerhalb der Welle anbringen.



Das Fenster soll am Punkt P(2 | 0) beginnen. Seine Breite $|\overline{PQ}|$ soll mindestens 5 m und höchstens 10 m betragen. Der Punkt R soll auf der oberen Begrenzungslinie (Graph G_w) der Welle liegen, welche durch die Funktion $w : x \mapsto -0{,}01x^3 + 0{,}15x^2$ beschrieben wird. Bei Berechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden.

4.1 Zeigen Sie, dass die Maßzahl A der Fläche des Fensters abhängig von der x-Koordinate des Punktes Q durch die Funktionsgleichung $A(x) = 0{,}005\,(-x^4 + 17x^3 - 30x^2)$ beschrieben wird, und geben Sie für die Funktion A einen Definitionsbereich D_A an, der den Vorgaben von 4.0 entspricht. (5 BE)

4.2 Der Architekt möchte das Hallenbad möglichst hell gestalten. Aus diesem Grund soll die Fläche des Fensters möglichst groß sein. Bestimmen Sie die x-Koordinate des Punktes Q, für welche die Maßzahl der Fläche A maximal wird. Berechnen Sie für diesen Fall Breite, Höhe und Fläche des Fensters. Ermitteln Sie den prozentualen Anteil der Fensterfläche an der Logofläche, wenn diese $36\,m^2$ beträgt. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. (9 BE)