Aufgabengruppe A

A I

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2 \cdot \ln((x+2)^2 + 4)$ in der größtmöglichen Definitionsmenge $D_f \subseteq$ IR. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Bestimmen Sie D_f, untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen und bestimmen Sie ihr Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge. (4 BE)

1.2 Untersuchen Sie G_f auf Punkte mit horizontaler Tangente (Koordinaten und Art).
[Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{4x+8}{x^2+4x+8}$] (5 BE)

1.3 Ermitteln Sie die Koordinaten der Wendepunkte von G_f und bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente in dem Wendepunkt, der auf der y-Achse liegt.
(9 BE)

1.4 Zeichnen Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $-8 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Tragen Sie auch die Wendetangente aus Aufgabe 1.3 in Ihre Zeichnung ein. (5 BE)

2.0 Wir betrachten nun die Funktion $g: x \mapsto g(x) = f'(x) = \dfrac{4x+8}{x^2+4x+8}$ mit $D_g = D_f$ (siehe Aufgabe 1.2). Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

2.1. Ermitteln Sie − unter Verwendung der Ergebnisse von Aufgabe 1 − die Nullstelle von g und die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_g. (6 BE)

2.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptote von G_g und zeichnen Sie G_g unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $-8 \le x \le 4$ in das Koordinatensystem von Aufgabe 1.4. (5 BE)

2.3 Berechnen Sie in Abhängigkeit von c den Inhalt $A(c)$ der Fläche, die G_g mit der x-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = c$ $(c > -2)$ einschließt, und untersuchen Sie, ob $A(c)$ für $c \to \infty$ endlich ist. (5 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung AI

3.0 Eine bayerische Gemeinde gab 2006 im Vorfeld der Fortschreibung des Flächennutzungsplanes auf die kommenden Jahre eine Prognose für die Entwicklung der Einwohnerzahl in Auftrag. Das beauftragte Institut sollte aus folgendem Datensatz als mathematisches Modell eine reelle Funktion N(t) aufstellen, die die Einwohnerzahl N in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren seit 1995 annähernd beschreibt und deren Werte für die weitere Entwicklung der Einwohnerzahl ab 2005 zugrunde gelegt werden sollen. Für den 1.1.1995 wird $t = 0$ gesetzt.
Auf die Mitführung von Einheiten kann im Folgenden verzichtet werden.

Jahr (Stand am 1.1.)	1995	. . . . .	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Einwohnerzahl	14416	. . . . .	15446	15631	15805	15966	16127	16286

3.1. Um einen geeigneten Ansatz zu finden, sind folgende Fragen zu beantworten. Die Antworten sind kurz zu begründen. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Näherungsfunktion zu jedem Zeitpunkt die Eigenschaften hat, die sich aus den Werten der Tabelle ergeben.

A) Sollte die 1. Ableitung der Näherungsfunktion stets positiv oder negativ sein?

B) Sollte der Graph der Näherungsfunktion stets rechts- oder linksgekrümmt sein?

C) Hat die gesuchte Funktionsgleichung die Form $y = mx + b$? (4 BE)

3.2 Die Erkenntnisse von 3.1 legen nahe, den Ansatz für eine beschränkte Wachstumsfunktion der Form $N(t) = C - a \cdot e^{-kt}$ mit C, a, k $\in \mathbb{R}^+$ zu wählen.
Bestimmen Sie aus den Einwohnerzahlen der Jahre 2000 und 2005 die Werte für a und k, wenn gilt: $C = 20000$.
[Ergebnis: $N(t) = 20000 - 5584 \cdot e^{-0{,}04078t}$] (5 BE)

3.3 Überprüfen Sie, ob das Modell die Einwohnerzahl von 2003 richtig angibt und prognostizieren Sie mit Hilfe des Modells die Einwohnerzahl für 2030. (3 BE)

3.4 Beschreiben Sie die Bedeutung des Wertes von C im Sachzusammenhang.(2 BE)

3.5 Berechnen Sie den Wert der 1. Ableitung $\frac{dN}{dt} = \dot{N}(t)$ an der Stelle $t = 14$ und interpretieren Sie dessen Bedeutung. (3 BE)

3.6 Die Kanalisation der Gemeinde ist für ca. 19000 Einwohner ausgelegt. Berechnen Sie, wann gemäß dem Modell mit einer Überschreitung dieser Einwohnerzahl zu rechnen ist. (4 BE)