2010 AII

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{2x}$, $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph ist G_f.

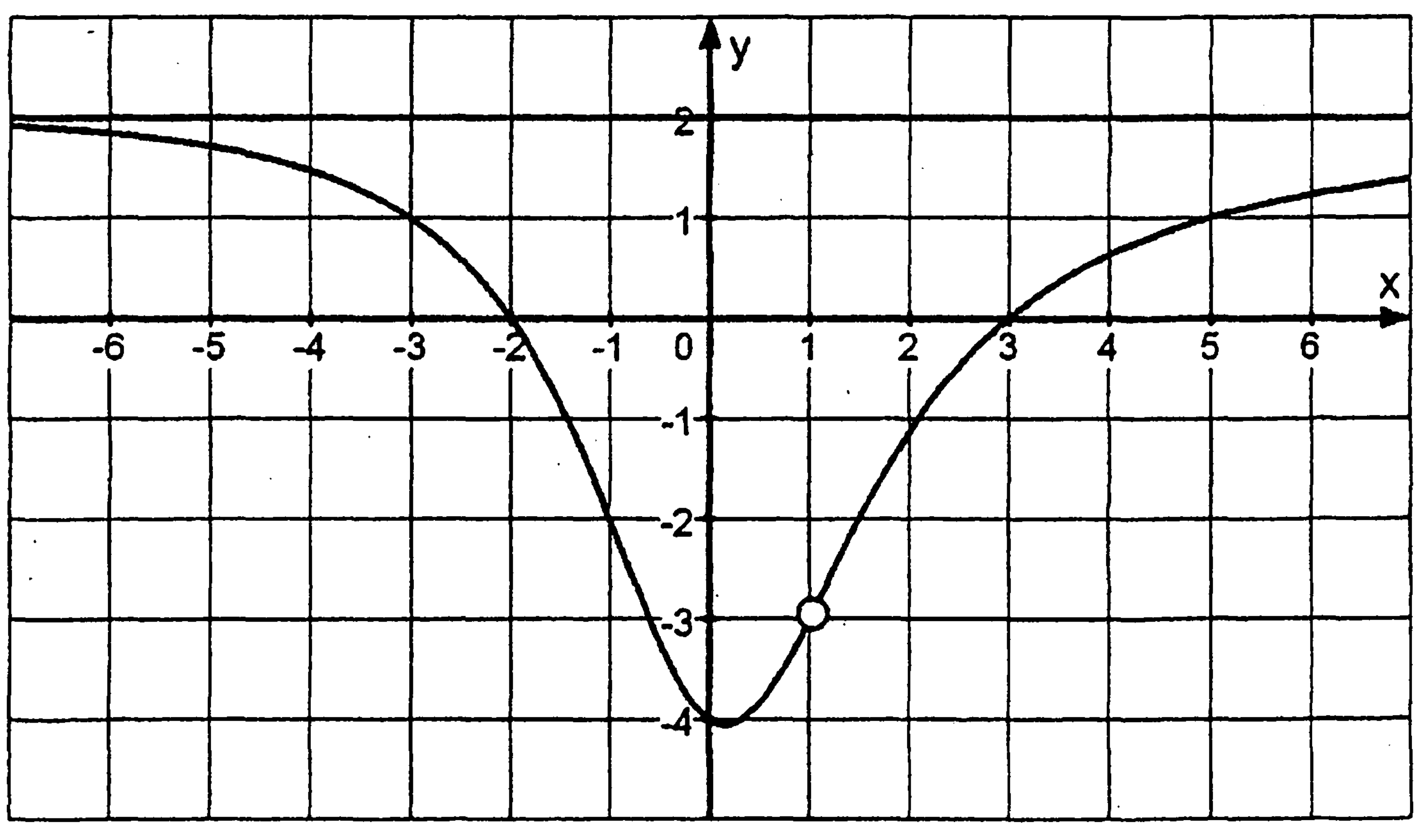
1.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten und berechnen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von G_f. Bestimmen Sie das Verhalten von f(x) für $|x| \to \infty$ und geben Sie die Gleichung der horizontalen Asymptote von G_f an. (8 BE)

1.2 Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen die Funktion f echt monoton zunehmend bzw. echt monoton abnehmend ist, und bestimmen Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte von G_f.
(Zur Kontrolle: $f'(x) = 2(x^2 - x) \cdot e^{2x}$) (8 BE)

1.3 Zeichnen Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und der Berechnung weiterer geeigneter Funktionswerte für $x \in [-1{,}3;\ 1{,}3]$ in ein kartesisches Koordinatensystem (Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 5 cm). (5 BE)

1.4 Gegeben ist die Funktion $F: x \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + bx + c) \cdot e^{2x}$, $b, c \in \mathbb{R}$, $D_F = D_f$. Bestimmen Sie b und c so, dass F eine Stammfunktion von f ist. Kennzeichnen Sie die Fläche, die G_f mit den Koordinatenachsen im ersten Quadranten einschließt und berechnen Sie die exakte Maßzahl des Flächeninhalts. (Teilergebnis: $b = -3;\ c = 2{,}5$) (9 BE)

2.0 Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen einer gebrochen-rationalen Funktion g mit seiner Asymptote. Der Graph besitzt bei $(1|-3)$ ein „Loch“ und keine weiteren Definitionslücken. Alle Schnittstellen mit den Koordinatenachsen sind ganzzahlig.



2.1 Begründen Sie genau, zu welchem der nachfolgenden Funktionsterme der abgebildete Graph gehört.

$$g_1(x) = \frac{2(x+2)(x-3)(x-1)}{(x-1)} \qquad g_2(x) = \frac{2(x-2)(x+3)(x-1)}{(x+1)(x^2-1)}$$

$$g_3(x) = \frac{(x+2)(x-3)(x-1)}{0{,}5(x-1)^2(x+1)} \qquad g_4(x) = \frac{2(x+2)(x-3)(x-1)}{(x^2+3)(x-1)}$$

$$g_5(x) = \frac{2(x+2)(x-3)(x-1)}{(x^2+2)(x-1)}$$

(5 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung AII

2.2 Gegeben ist nun die Funktion $h: x \mapsto \ln(g(x))$ in der maximalen Definitionsmenge $D_h \subset \mathbb{R}$, wobei der zu g gehörige Graph in 2.0 dargestellt ist. Geben Sie D_h, die Nullstellen von h und das Verhalten von h(x) im Unendlichen an. (5 BE)

3.0 Die Herstellungskosten k(x) (in Euro) pro Gerät eines bestimmten Plasma-Fernsehgerätes in Abhängigkeit von der Stückzahl x können durch die reelle Näherungsfunktion mit dem Funktionsterm

$k(x) = \dfrac{1100x + 120000}{2x + 3}$ für $x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 50$ beschrieben werden.

3.1 Berechnen Sie die Herstellungskosten pro Fernsehgerät bei 100 bzw. 1000 produzierten Fernsehgeräten, und die Stückzahl, ab der die Herstellungskosten pro Gerät unter 600 € liegen. (5 BE)

3.2 Zeigen Sie, dass sich die Herstellungskosten eines Gerätes mit wachsender Stückzahl immer mehr verringern.
(Zur Kontrolle: $k'(x) = \dfrac{-236700}{(2x+3)^2}$) (4 BE)

3.3 Ermitteln Sie $k'(100)$ und $k'(1000)$ und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang. (4 BE)

3.4 Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to \infty} k(x)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. (2 BE)

3.5 Zeichnen Sie den Graphen G_k von k und seine Asymptote für $x \in [50;1200]$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem. (5 BE)