A I

1.0 $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x-1}$

1.1 (5)

$D_f:\ x-1=0 \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ ✓

$z(1) \neq 0 \Rightarrow$ senkrechte Asymptote: $x = 1$ ✓

$(x^2-4x+4):(x-1) = x-3+\dfrac{1}{x-1}$ ✓

$$\begin{array}{l} \underline{x^2 - x} \\ \quad -3x + 4 \\ \quad \underline{-3x + 3} \\ \qquad\quad 1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ schiefe Asymptote: $y = x-3$ ✓

Nullstelle von f: $(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = 2$ ✓

1.2 (7)

$f'(x) = \dfrac{(x-1)\cdot 2(x-2) - (x-2)^2}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-2)(2x-2-x+2)}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{(x-2)\cdot x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x_4 = 0;\ x_5 = 2$ ✓

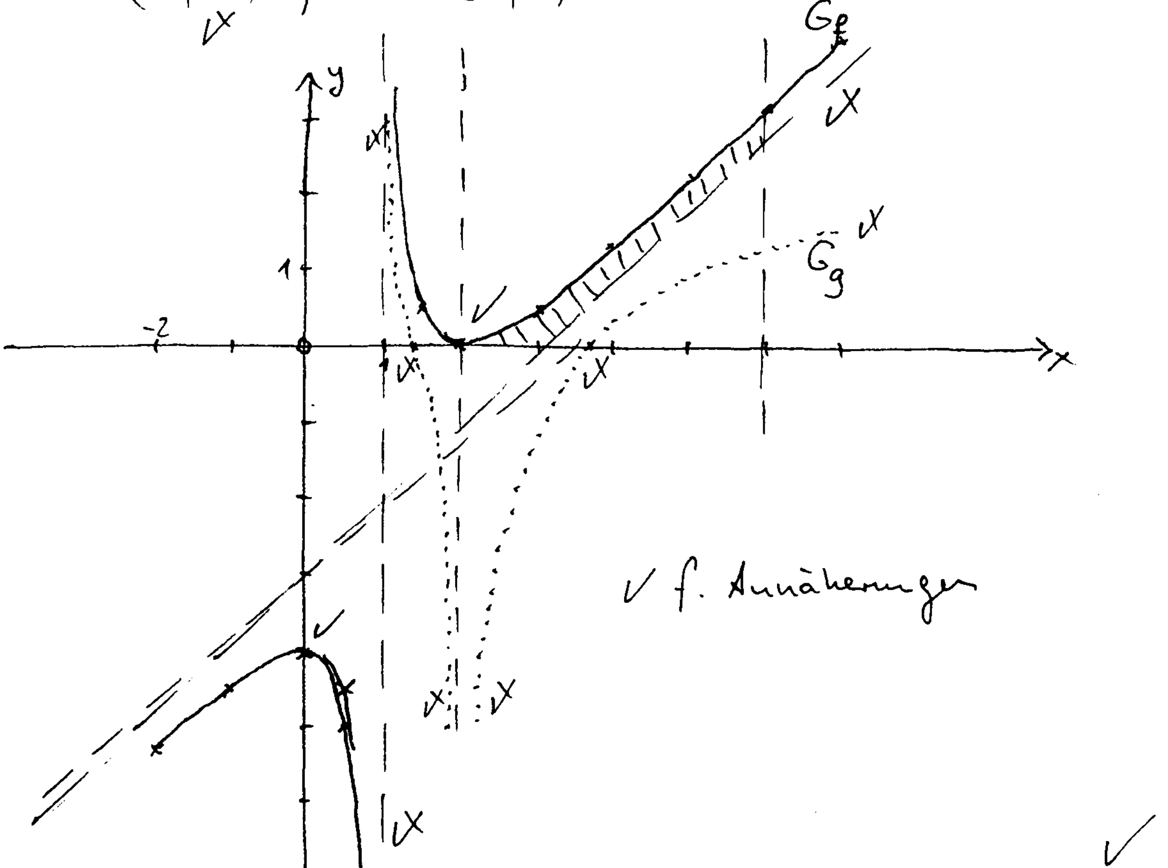
entweder Monotonietabelle: [oder $f''(x)$]

	$x<$	0	$<x<$	1	$<x<$	2	$<x$
$f'(x)$	+	0	−	n. def.	−	0	+
G_f	steigt	HOP	fällt	n. def.	fällt	TIP	steigt

oder: schiefe As. steigt, 2 Horizontalpunkte $\Rightarrow$ bei $x=0$ HOP, bei $x=2$ TIP

HOP$(0|-4)$; TIP$(2|0)$

1.3 (5)



x	−2	−1	0	2	3	4	5	6	7
y	−5,33	−4,5	−4	0	0,5	1,33	2,25	3,2	4,17

$f(0,5) = -4,5;\quad f(1,5) = 0,5$

$$A = \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^6 \left(f(x) - x + 3\right) dx$$ 1.4

Graph. Kennz. ✓

$$= \int_2^3 \left(x - 3 + \frac{1}{x-1}\right) dx \;✓ + \int_3^6 \frac{1}{x-1}\,dx \;✓$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x + \ln(x-1)\right]_2^3 + \left[\ln(x-1)\right]_3^6 \quad ✓\;✓$$

$$= 4{,}5 - 9 + \ln 2 - (2 - 6 + \ln 1) + \ln 5 - \ln 2$$

$$= -0{,}5 + \ln 5 = 1{,}11 \; [FE] \; ✓$$

5

$g(x) = \ln(f(x))$ 1.5.0

$D_g: \; f(x) > 0 \;\Rightarrow\; D_g =]1; +\infty[\setminus \{2\}$ ✓; ✓ 1.5.1

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} g(x) = +\infty$ ✓

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x \to 2} g(x) = -\infty$ ✓

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ ✓

senkrechte Asymptoten: $x = 1$; $x = 2$ ✓; ✓

6

Nullstelle von g: 1.5.2

$g(x) = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = 1$ ✓ $\Rightarrow$

$$\frac{(x-2)^2}{x-1} = 1 \;\Rightarrow\; x^2 - 4x + 4 = x - 1$$

$$x^2 - 5x + 5 = 0 \;✓ \qquad D = 25 - 20 = 5$$

$$x_{1/2} = \frac{5 \pm 2{,}24}{2}$$

$$x_1 = 3{,}62; \quad x_2 = 1{,}38 \;✓$$

6

Alternative zu 1.4

$$\int_2^6 f(x)\,dx - \int_3^6 g(x)\,dx \qquad \text{oder} \qquad \int_2^6 \left(f(x) - g(x)\right) dx - \frac{1}{2}$$

$$\left[\text{oder} \quad \int_2^6 f(x)\,dx - 4{,}5\right]$$

2. (5)

(1) nicht entscheidbar ✓

(2) richtig ✓, da h' bei $x=0$ von + nach − wechselt ✓

(3) falsch ✓, da $h'(1) = -1$ und nicht 0, wie behauptet ✓

3.0

$$B(t) = (at+b)e^{-0{,}15t} + 70, \quad t \geq 0$$

3.1 (7)

$$B(7) = 35 \Rightarrow \text{I. } (7a+b)e^{-1{,}05} + 70 = 35 \checkmark$$

$$(7a+b)e^{-1{,}05} = -35$$

$$\Rightarrow 7a + b = -100 \Rightarrow b = -7a - 100 \checkmark$$

$$\dot{B}(t) = (at+b)e^{-0{,}15t} \cdot (-0{,}15) + a \cdot e^{-0{,}15t} \checkmark$$

$$= (-0{,}15at + a - 0{,}15b)\, e^{-0{,}15t} \checkmark$$

$$\dot{B}(7) = 0 \Rightarrow \text{II. } (-1{,}05a + a - 0{,}15b)e^{-1{,}05} = 0 \checkmark$$

$$-0{,}05a - 0{,}15b = 0$$

$$\xRightarrow{\text{mit I}} -0{,}05a + 1{,}05a + 15 = 0$$

$$\underline{a = -15} \overset{\text{I}}{\Rightarrow} \underline{b = 5} \checkmark$$

3.2 (4)

$$B(0) = 5 \cdot e^0 + 70 = 75 \; [\text{Millionen Fische}] \checkmark$$

$$\lim_{t \to \infty} \Big[\underbrace{\underbrace{(-15t+5)}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{e^{-0{,}15t}}_{\to 0}}_{\to 0\text{, da e-Fktn. überwiegt}} + 70 \Big] = 70 \checkmark$$

Langfristig stabilisiert sich die Fischpopulation auf 70 Millionen Exemplare. ✓

3.3 (5) B(16) minus ✗

$$B(16{,}5) = (-15 \cdot 16{,}5 + 5)e^{-0{,}15 \cdot 16{,}5} + 70 = 49{,}59 \; [\text{Mill. F.}]$$

$$\dot{B}(16{,}5) = (2{,}25 \cdot 16{,}5 - 15{,}75) \cdot e^{-0{,}15 \cdot 16{,}5} = 1{,}80 \checkmark$$

Im Jahre 2011 nimmt der Fischbestand etwa um 1,8 Millionen Fische zu. ✓

$\dot{B}(t) = 2{,}25\,(t-7)\cdot e^{-0{,}15t} \Rightarrow$ 3.4

$\ddot{B}(t) = 2{,}25\,(t-7)\,e^{-0{,}15t}\cdot(-0{,}15) + 2{,}25\cdot e^{-0{,}15t}$ ✓
✓

$= 2{,}25\cdot e^{-0{,}15t}\cdot(-0{,}15t + 1{,}05 + 1)$ 5

$= 2{,}25\,e^{-0{,}15t}\cdot(-0{,}15t + 2{,}05)$ ✓ $= 0 \Rightarrow$

$0{,}15t = 2{,}05$

$t = 13{,}67$ ✓ $\Rightarrow$ 2008 ✗

Da B zu diesem Zeitpunkt steigt (s. 3.3) und bei $t=7$ ein Minimum hatte, kann es sich nur um den Zeitpunkt handeln, in dem B maximal zunimmt. ✗ $\left(B'(13{,}67) = 15\,e^{-2{,}05} > 0\right)$.

[alternativ Krümmungstabelle]