AII

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2-4}{(x-1)^2}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Der zugehörige Graph heißt G_f.

1.1 Geben Sie D_f an, bestimmen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von G_f und geben Sie die Gleichungen und Art aller Asymptoten an. (6 BE)

1.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f und bestimmen Sie daraus die Art und die Koordinaten des Extrempunktes von G_f.
(Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-2x+8}{(x-1)^3}$) (8 BE)

1.3 Zeichnen Sie die Asymptoten und G_f mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse für $-6 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (1 LE = 1 cm) (5 BE)

1.4 Die Funktion $F: x \mapsto x + \ln(x-1)^2 + \frac{3}{x-1}$ mit $D_F = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ist eine Stammfunktion von f (Nachweis nicht erforderlich). G_f und die Koordinatenachsen schließen im III. Quadranten ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie die exakte Maßzahl seines Flächeninhalts. (3 BE)

2.0 Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = (x-4) \cdot \ln(x-3)$ in der größtmöglichen Definitionsmenge $D_h \subset \mathbb{R}$. Der Graph von h wird mit G_h bezeichnet.

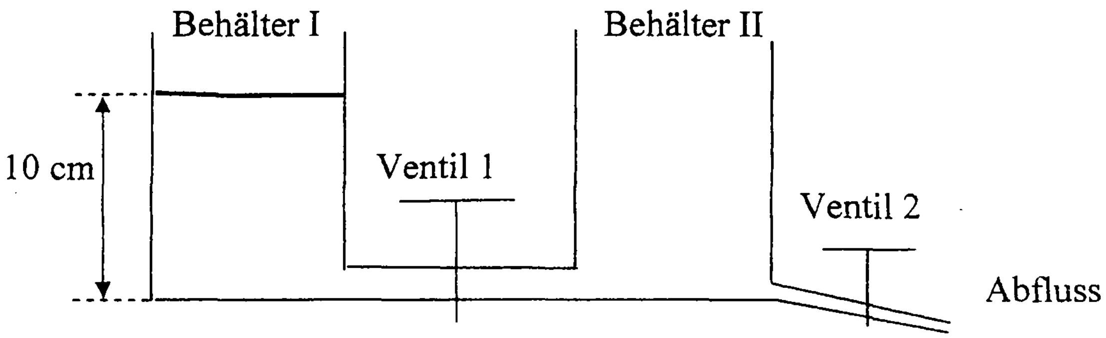
2.1 Bestimmen Sie D_h und die Nullstelle von h sowie deren Vielfachheit. Untersuchen Sie das Verhalten von h(x) an den Rändern von D_h und geben Sie die Gleichung der Asymptote von G_h an. (8 BE)

2.2 Weisen Sie nach, dass G_h an der Stelle $x = 4$ einen Punkt mit waagrechter Tangente besitzt.
Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_h, schließen Sie daraus auf die Art des Extrempunktes von G_h und geben Sie die Wertemenge von h an.
(Teilergebnis: $h''(x) = \frac{x-2}{(x-3)^2}$) (10 BE)

2.3 Zeichnen Sie die Asymptote von G_h in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie G_h mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse in das Koordinatensystem. (4 BE)

Fortsetzung nächste Seite

3.0 Gegeben sind zwei gleichartige Behälter, welche über ein Rohr miteinander verbunden sind. Am Anfang sind beide Ventile geschlossen und Behälter I hat einen Wasserstand von 10 cm, Behälter II enthält kein Wasser. Beim ersten Experiment wird zum Zeitpunkt $t = 0$ nur das Ventil 1 geöffnet. Der Wasserstand in Behälter II verhält sich entsprechend folgender Funktion:
$A_1(t) = 5 \cdot (1 - e^{-k \cdot t})$ mit $t \geq 0$, wobei $A_1(t)$ der Wasserstand (in cm) zum Zeitpunkt t ist. Die Zeit t wird in Sekunden gemessen.
Bei den Rechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden. Runden Sie alle Werte auf eine Nachkommastelle.



3.1 Zum Zeitpunkt $t = 8{,}0$ s beträgt der Wasserstand in Behälter II 4,0 cm. Bestimmen Sie daraus den Wert von k.
(Ergebnis: $k = 0{,}2$) (3 BE)

3.2 Berechnen Sie die Zeit, nach der in Behälter II der Wasserstand auf 2,0 cm angestiegen war. (3 BE)

3.3.0 Das Experiment wird noch einmal wiederholt, wobei jetzt auch der Abfluss hinter Behälter II (Ventil 2) geöffnet ist, durch den gleichmäßig eine bestimmte Menge Wasser abfließt. Die Funktion für den Wasserstand in Behälter II verändert sich nun wie folgt: $A_2(t) = 5 - 5 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t} - 0{,}1t$ mit $0 \leq t \leq t_{leer}$.

3.3.1 Ermitteln Sie, welcher Wasserstand in Behälter II maximal erreicht wird. (6 BE)

3.3.2 In der Praxis lässt sich die Funktion $A_2(t)$ für $t > 30$ durch ihre schiefe Asymptote ersetzen. Geben Sie die Gleichung der schiefen Asymptote an und berechnen Sie damit näherungsweise den Zeitpunkt t_{leer}, zu dem der Behälter II wieder leer ist. (4 BE)