2012 AI

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \to \frac{(x-3)(x+2)}{2x^2-8x+6}$ in der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie D_f und geben Sie die Nullstelle sowie die Art der Definitionslücken von f an. (6 BE)

1.2 Zeigen Sie, dass die Funktion $\tilde{f}: x \to \frac{x+2}{2x-2}$ mit $D_{\tilde{f}} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ die stetige Fortsetzung von f ist. Untersuchen Sie das Verhalten von $\tilde{f}$ in der Umgebung ihrer Definitionslücke und geben Sie die Gleichungen und die Art aller Asymptoten des Graphen $G_{\tilde{f}}$ von $\tilde{f}$ an. (5 BE)

1.3 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von $G_{\tilde{f}}$ und geben Sie die Wertemenge von $\tilde{f}$ an.
(Zur Kontrolle $\tilde{f}'(x) = \frac{-3}{2(x-1)^2}$) (6 BE)

1.4 Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen $G_{\tilde{f}}$ im Punkt $P(2 \mid \tilde{f}(2))$ und bestimmen Sie die Koordinaten des weiteren Punktes R von $G_{\tilde{f}}$, in welchem der Graph $G_{\tilde{f}}$ die gleiche Steigung wie die Tangente t besitzt. (6 BE)

1.5 Zeichnen Sie die Asymptoten und die beiden Tangenten in den Punkten P und R in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie $G_{\tilde{f}}$ mit Hilfe der vorliegenden Ergebnisse in die Zeichnung. (6 BE)

1.6 Zeigen Sie, dass sich $\tilde{f}$ in der Form $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2x-2}$ schreiben lässt, und ermitteln Sie die Gleichung einer Stammfunktion F von $\tilde{f}$. Bestimmen Sie die Flächenmaßzahl des Flächenstücks, das $G_{\tilde{f}}$ im III. Quadranten mit den Koordinatenachsen einschließt. (6 BE)

1.7 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \ln(\tilde{f}(x))$ in der maximalen Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$. Geben Sie D_g an und bestimmen Sie die Nullstelle von g. (4 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung AI

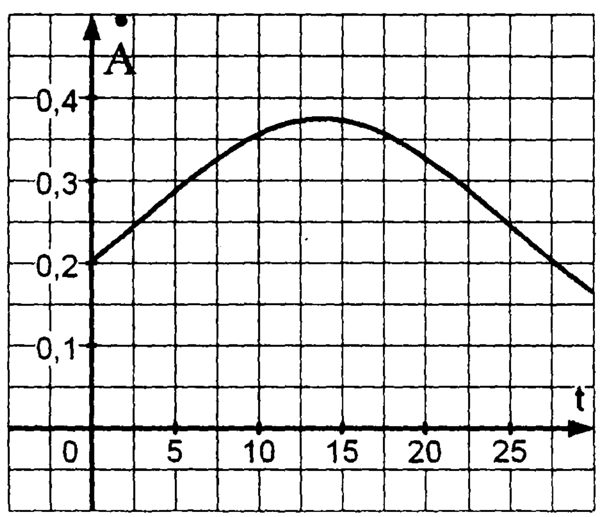
2.0 Bei der Weinerzeugung kann man während des Gärprozesses den aktuellen Alkoholgehalt des Mostes näherungsweise mit der Funktion $A(t) = \dfrac{100}{8 + b \cdot e^{c \cdot t}}$ berechnen, t ist dabei die Dauer des Gärprozesses in Tagen mit $t \geq 0$, b und c sind reelle Konstanten mit $b > 0$ und $c < 0$. A(t) gibt den Alkoholgehalt in Volumenprozent an. Je nach den Gegebenheiten im Gärkeller variieren b und c. Bei der Rechnung kann auf die Mitführung von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie die Ergebnisse sinnvoll.

2.1 Der Traubenmost des Winzers Müller hat bereits zu Beginn des Gärprozesses im Keller einen Alkoholgehalt von 2,00 %. Nach 20 Tagen beträgt der Alkoholgehalt genau 8,46 %.
Bestimmen Sie damit die Werte b und c.
(Ergebnis: $b = 42$, $c = -0{,}12$) (6 BE)

2.2 Nach 40 Tagen wird der Gärvorgang abgebrochen. Berechnen Sie den Alkoholgehalt des dann fertigen Weins. Ermitteln Sie den Alkoholgehalt, der sich nach sehr langer Zeit einstellen würde. (4 BE)

2.3 Im Herbst wird der junge Wein („Federweißer") ausgeschenkt, dessen Alkoholgehalt höchstens 10% beträgt. Berechnen Sie, bis zu welchem Tag nach Beginn des Gärprozesses der Federweiße ausgeschenkt werden kann. (4 BE)

2.4 Bestimmen Sie die Ableitung $\dfrac{dA}{dt} = \dot{A}(t)$ und zeigen Sie, dass der Alkoholgehalt des Weins ständig zunimmt. (3 BE)



2.5 Der Graph der Ableitung $\dot{A}$ ist nebenstehend abgebildet. Machen Sie mit Hilfe des Graphen möglichst genaue und begründete Aussagen über die Entwicklung des Alkoholgehalts des Weins. Entnehmen Sie aus der Zeichnung die Koordinaten des Hochpunktes von $\dot{A}$ und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang. (4 BE)