2012 AII

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $g: x \mapsto \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

1.1 Geben Sie D_g an, berechnen Sie die Nullstelle von g und geben Sie deren Vielfachheit an. Untersuchen Sie das Verhalten von g(x) an den Rändern von D_g und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_g an. (8 BE)

1.2 Geben Sie gegebenenfalls unter Verwendung der Ergebnisse von Aufgabe 1.1 die Koordinaten des einzigen Extrempunktes von G_g an und ermitteln Sie dessen Art. (4 BE)

1.3 Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von g mit seiner waagrechten Asymptote. (3 BE)

1.4 Zeichnen Sie die Asymptoten in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie G_g mithilfe Ihrer bisherigen Ergebnisse in die Zeichnung. (5 BE)

2.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{2 \cdot \ln(x) + 1}{x}$ in der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph ist G_f.

2.1 Bestimmen Sie D_f und die Nullstellen von f. Untersuchen Sie das Verhalten von f(x) an den Rändern von D_f und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f an. (8 BE)

2.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f und bestimmen Sie die Art und die exakten Koordinaten des Extrempunktes von G_f.

(Zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{-2 \cdot \ln(x) + 1}{x^2}$) (7 BE)

2.3 Nehmen Sie ohne weitere Rechnung aber mit Begründung Stellung zu der Aussage: „Der Graph G_f besitzt einen Wendepunkt." Begründen Sie Ihre Aussage. (3 BE)

2.4 Skizzieren Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem. (4 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung AII

3.0 Ein großer Elektronik-Konzern hat in einer Untersuchung die Wartezeiten auf eine freie Telefonleitung bei seinem Callcenter erfasst. Die Funktion W_k gibt dabei die Wahrscheinlichkeit an, mit der höchstens t Minuten (min) auf eine freie Telefonleitung gewartet werden muss.

Es gilt: $W_k(t) = 1 - e^{-kt}$ mit $t \in \mathbb{R}^+$ und $k \in \mathbb{R}^+$. Der Wert von k ist von der Tageszeit abhängig.

Bei der Rechnung kann auf Einheiten verzichtet werden.

3.1 Berechnen Sie für $k_1 = \frac{1}{60}\frac{1}{\text{min}}$, $k_2 = \frac{1}{12}\frac{1}{\text{min}}$ und $k_3 = \frac{1}{6}\frac{1}{\text{min}}$ die Wahrscheinlichkeit in Prozent, höchstens 5 Minuten auf eine freie Leitung warten zu müssen, und folgern Sie hieraus die Bedeutung des Parameters k für die Wartezeit. (5 BE)

3.2 Bestimmen Sie den Wert k in der Einheit $\frac{1}{\text{min}}$, für den die Wahrscheinlichkeit 95% beträgt, dass ein Anrufer nach höchstens 10 Minuten auf eine freie Leitung durchgestellt wird. (3 BE)

3.3 Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{t \to \infty} W_k(t)$ und $\lim\limits_{k \to \infty}(1 - e^{-kt})$ und beschreiben Sie möglichst einfach deren Bedeutung. (4 BE)

3.4 Sei nun $k = 0{,}1\frac{1}{\text{min}}$.

Die durchschnittliche Wartezeit $\overline{T}$ berechnet sich als $\overline{T} = \int\limits_0^\infty t \cdot \dot{W}_{0,1}(t)\,dt$. Zeigen Sie, dass $G(t) = -e^{-0,1t} \cdot (t + 10)$ eine Stammfunktion von $t \cdot \dot{W}_{0,1}(t)$ ist. Berechnen Sie $\overline{T}$ und die Wahrscheinlichkeit, höchstens $\overline{T}$ Minuten auf eine freie Leitung warten zu müssen. (6 BE)