2013 A I

1.1 $4(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3$, also $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ✓

$x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{5}$ sind die Nullstellen ✓

(3) { $x = 3$ ist eine Polstelle (1. Ordnung) ✓

1.2 1. Weg:

$$(x^2+0x-5):(4x-12) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + \frac{4}{4x-12} \quad \left(= \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + \frac{1}{x-3}\right)$$

$$\begin{array}{l} \underline{x^2-3x} \\ \quad 3x-5 \\ \quad \underline{3x-9} \\ \qquad 4 \end{array}$$

(4) ✓✓

2. Weg:

$$\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + \frac{1}{x-3} = \frac{x(x-3)+3(x-3)+4}{4(x-3)} = \frac{x^2-5}{4(x-3)}$$ ✓ ✓

$\Rightarrow$ schiefe Asymptote: $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ ✓; zudem senkrechte As.: $x = 3$ ✓

1.3 $$f'(x) = \frac{4(x-3)\cdot 2x - (x^2-5)\cdot 4}{16(x-3)^2} = \frac{8x^2-24x-4x^2+20}{16(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+5}{4(x-3)^2}$$ ✗ ✓ ✓

$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad D = 36 - 20 = 16$

$x_{1/2} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = 5; \ x_2 = 1$ ✓

(10)

	$x <$	1	$< x <$	3	$< x <$	5	$< x$	✓
x^2-6x+5	+	0	−	−	−	0	+	✗
$4(x-3)^2$	+	+	+	0	+	+	+	
$f'(x)$	+	0	−		−	0	+	✗
$G(f)$	steigt	HOP ✗ (1|0,5) ✗	fällt		fällt	TIP ✗ (5|2,5) ✗	steigt	✓

{ Monotonieintervalle: $G(f)$ steigt in $]-\infty; 1]$ sowie in $[5; +\infty[$ und fällt in $[1; 3[$ sowie in $]3; 5]$. ✗

Aus den Ordinaten der Extrempunkte folgt: $W(f) = \mathbb{R} \setminus]0{,}5; 2{,}5[$ ✓

1.5 $$A = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + \frac{1}{x-3}\right) dx = \left[\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \ln|x-3|\right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}$$ ✓ ✗ ✓ ✓

(6) $$= \frac{5}{8} + \frac{3}{4}\sqrt{5} + \ln(3-\sqrt{5}) - \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{4}\sqrt{5} + \ln(3+\sqrt{5})\right)$$ ✓

$$= \frac{3}{2}\sqrt{5} + \ln\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{3}{2}\sqrt{5} + \ln\frac{7-3\sqrt{5}}{2} = 1{,}43$$ ✓

✗ für Kennzeichnung der Fläche

Nur in D(g) gilt $f(x) > 0$, (sodass nur in D(g) der nat. Logarithmus definiert ist.) 2.1

oder: lt. Zeichnung nicht möglich

Nullstellen von g: $\frac{x^2-5}{4(x-3)} = 1 \notin W(f)$, also keine Nullstellen (6)

$\lim\limits_{x \to -\sqrt{5}^+} g(x) = \lim\limits_{x \to \sqrt{5}^-} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = \infty = \lim\limits_{x \to \infty} g(x)$

$g'(x) = \frac{4(x-3)}{x^2-5} \cdot \frac{x^2-6x+5}{4(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+5}{(x^2-5)(x-3)} = 0 \Rightarrow x_1 = 5;\ x_2 = 1$ 2.2

$x_{1/2} \in D(g)$

	$-\sqrt{5} < x <$	1	$< x < \sqrt{5}$	$3 < x <$	5	$< x$
x^2-6x+5	+	0	−	−	0	+
x^2-5	−	−	−	+	+	+
$x-3$	−	−	−	+	+	+
$g'(x)$	+	0	−	−	0	+
G(g)	steigt	HOP	fällt	fällt	TIP	steigt

(4)

Einfacher: Da der nat. Log. streng monoton steigt, hat g in ihrem Def. bereich dieselben Extremstellen wie f

$\Rightarrow$ HOP bei $x = 1$; TIP bei $x = 5$

$z(13) = 0{,}25 \cdot 169 \cdot e^{-13a} + 5 = 27 \Rightarrow e^{-13a} = 0{,}521 \Rightarrow$ 3.1

$-13a = \ln 0{,}521 = -0{,}65 \Rightarrow a = 0{,}05$ (3)

$z(0) = 5$; $z(90) = 0{,}25 \cdot 90^2 \cdot e^{-0{,}05 \cdot 90} + 5 = 27{,}49$ (≈ 27) (2) 3.2

$\dot{z}(t) = 0{,}25t^2 \cdot e^{-0{,}05t} \cdot (-0{,}05) + 0{,}5t \cdot e^{-0{,}05t} = (-0{,}0125t^2 + 0{,}5t)\underbrace{e^{-0{,}05t}}_{>0}$ 3.3

$\dot{z}(t) = 0 \Rightarrow -0{,}0125\,t\,(t-40) = 0 \Rightarrow t_1 = 0$; $t_2 = 40$

Der Klammerausdruck ist eine nach unten geöffnete Parabel, die bei $t = 40$ von + nach − wechselt $\Rightarrow$ G(z) hat bei $t = 40$ einen HOP, also größte Verkehrsdichte nach 40 min, also um <u>7.40 Uhr</u>. (7)

$z(40) = 59{,}13$ (≈ 59) Fahrzeuge.

$\dot{Z}(t) = -0{,}25\,e^{-0{,}05t}(40t + 800) + 0{,}0125\,e^{-0{,}05t}(20t^2 + 800t + 16000) + 5$ 3.5

$= (-10t - 200 + 0{,}25t^2 + 10t + 200)\,e^{-0{,}05t} + 5$

$= (0{,}25t^2) \cdot e^{-0{,}05t} + 5 = z(t)$, w.z.b.w.

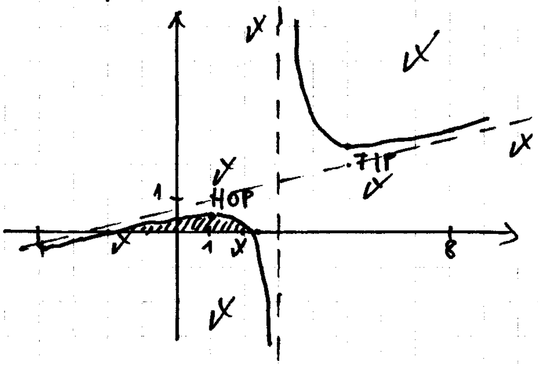
$\int_0^{60} z(t)\,dt = \left[-0{,}25\,e^{-0{,}05t}(20t^2 + 800t + 16000) + 5t\right]_0^{60} =$ (6)

$= -0{,}25 \cdot e^{-3}(72000 + 48000 + 16000) + 300 + 0{,}25 \cdot 16000$

$= -0{,}25 \cdot e^{-3} \cdot 136000 + 4300 = 2607{,}24 \approx 2607$

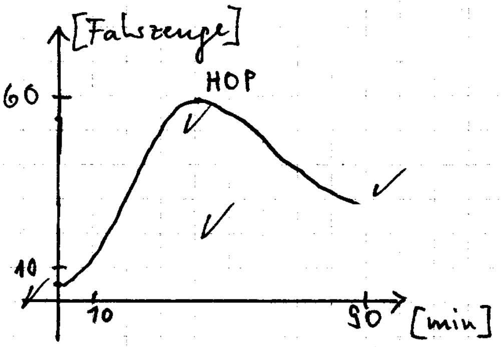
$\Rightarrow$ In der ersten Stunde, also von 7–8 Uhr, passieren 2607 Fahrzeuge die Kreuzung.

$f(-4) = -0{,}4$; $f(8) = 2{,}95$ 1. 4



⑤ (ohne die Fläche!)

3. 4



④