AII

1.0 Eine gebrochenrationale Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f \subset \mathbb{R}$, hat eine Nullstelle bei $x = -1$, eine Unendlichkeitsstelle (Polstelle) ohne Vorzeichenwechsel an der Stelle $x = 1$ und eine stetig behebbare Definitionslücke an der Stelle $x = 4$. Der Graph von f hat ferner eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 0$.

1.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm f(x), wenn der Nenner ein Polynom dritten Grades ist und außerdem gilt: $f(5) = 3$. (5 BE)

1.2.0 Im Folgenden wird die stetige Fortsetzung g der Funktion f betrachtet: $g: x \mapsto \frac{8x+8}{(x-1)^2}$ mit $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

1.2.1 Geben Sie die Gleichungen und die Art aller Asymptoten von G_g sowie die Nullstelle von g an. (3 BE)

1.2.2 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_g und ermitteln Sie die Art und die Koordinaten des Extrempunktes von G_g.

(Teilergebnis: $g'(x) = \frac{-8x-24}{(x-1)^3}$) (9 BE)

1.2.3 Zeichnen Sie die Asymptoten und G_g mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse für $-6 \leq x \leq 8$ in ein Koordinatensystem. Berechnen Sie dazu weitere geeignete Funktionswerte. (5 BE)

1.2.4 Zeigen Sie, dass gilt: $\int g(x)dx = 4 \cdot \ln((x-1)^2) - \frac{16}{x-1} + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ und berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts der Fläche, die G_g mit den Achsen einschließt. (5 BE)

2.0 Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto 10 \cdot (2 - \ln(x))^2$ in der maximalen Definitionsmenge $D_h \subset \mathbb{R}$. Der Graph von h wird mit G_h bezeichnet.

2.1 Bestimmen Sie D_h sowie die Lage und die Vielfachheit der Nullstelle von h und untersuchen Sie das Verhalten von h an den Rändern von D_h. (5 BE)

2.2 Begründen Sie nur mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse ohne weitere Berechnungen, dass die Nullstelle der Funktion h ein Tiefpunkt von G_h ist. (2 BE)

2.3 Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes von G_h.

(Teilergebnis: $h''(x) = -20 \cdot \frac{\ln(x) - 3}{x^2}$) (7 BE)

2.4 Skizzieren Sie G_h für $0 < x \leq 24$ in ein Koordinatensystem.

(Maßstab: $1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 0{,}5\,\text{cm}$) (4 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung AII

3.0 Morgens um 7:00 Uhr wird eine Tasse heißer Tee eingeschenkt. Der Abkühlvorgang des Tees kann durch die Funktionsgleichung

$T(t) = 18 + a \cdot e^{-c \cdot t}$ (mit $a, c > 0, t \geq 0$) beschrieben werden, wobei T(t) die Temperatur des Tees in Grad Celsius angibt und t die Zeit in Minuten. Der Abkühlvorgang beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ um 7:00 Uhr.

Bei der Rechnung kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.

3.1 Nach 2 Minuten hat der Tee eine Temperatur von 74°C und um 7:25 Uhr ist er bereits auf 28°C abgekühlt. Bestimmen Sie aus diesen Angaben die Werte der Konstanten a und c. (5 BE)

Setzen Sie in den folgenden Teilaufgaben $a = 65$ und $c = 0{,}075$.

3.2 Ermitteln Sie die Temperatur des Tees um 7:00 Uhr und auf welche Endtemperatur sich der Tee langfristig abkühlen wird. Erläutern Sie die Bedeutung der Endtemperatur im Sachzusammenhang. (3 BE)

3.3 Bestimmen Sie die Werte der Ableitung von T nach 3 Minuten und nach 25 Minuten. Erläutern Sie die Werte im Sachzusammenhang. (4 BE)

3.4 Der Abkühlvorgang wird als abgeschlossen bezeichnet, wenn die Temperatur des Tees unter 19°C fällt. Berechnen Sie, um wie viel Uhr (gerundet auf ganze Minuten) dies der Fall ist. (3 BE)