2014

AI

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 2\right) \cdot e^{-0,5x}$ mit $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Untersuchen Sie f auf Nullstellen und das Verhalten von f(x) für $x \to \pm\infty$. (3 BE)

1.2 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f sowie Art und Koordinaten der Punkte mit horizontalen Tangenten.
Untersuchen Sie G_f auch auf Wendepunkte.
(Teilergebnis: $f'(x) = -\frac{1}{8}x^2 e^{-0,5x}$) (10 BE)

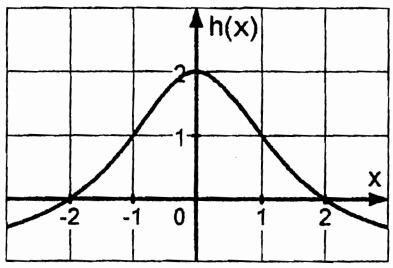
1.3 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen G_f im Punkt $P(-2 \mid f(-2))$.
(Ergebnis: $t: y = -0,5e \cdot x$) (3BE)

1.4 Zeichnen Sie G_f und die Tangente aus 1.3 unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $-3 \leq x \leq 7$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (1LE = 1cm)
(5 BE)

1.5.1 Berechnen Sie die reellen Werte von a und b so, dass die Funktion $F: x \mapsto \left(-0,5x^2 + ax + b\right) \cdot e^{-0,5x}$ mit $D_F = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f wird.
(Ergebnis: $a = -4;\ b = -12$) (5 BE)

1.5.2 Die Tangente t aus 1.3, der Graph G_f und die y-Achse schließen im II. Quadranten ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie das Flächenstück in der Zeichnung von 1.4 und berechnen Sie die exakte Maßzahl des Flächeninhalts. (5 BE)

2.0 In der nebenstehenden Zeichnung ist der Graph einer gebrochen-rationalen Funktion $h: x \mapsto h(x)$ dargestellt. Für die Funktion g gilt: $g(x) = \ln(h(x))$.



2.1 Bestimmen Sie aus der Zeichnung die maximale Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$ von g und geben Sie das Verhalten von g(x) an den Rändern von D_g sowie die Nullstellen von g(x) an. (5 BE)

2.2 Untersuchen Sie den Graphen von g auf Extrempunkte und geben Sie deren Art und Koordinaten an. (4 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung AI

3.0 Der Sauerstoffgehalt S von Gewässern, der in mg/l (Milligramm pro Liter) angegeben wird, lässt Rückschlüsse auf den Fischbestand der Gewässer zu. Ertragreiche Fischgewässer haben einen Sauerstoffgehalt von mehr als 6 mg/l. Dieser hängt unter anderem von der Wassertemperatur und dem Grad der Verunreinigung des Wassers ab.
Ein Bach wird zum Zeitpunkt t = 0 durch Einleiten von organischen Abfällen an einer Stelle verunreinigt. Bei annähernd konstanter Temperatur beschreibt folgende Funktion modellhaft den Sauerstoffgehalt in der Nähe der Einleitungsstelle in den Tagen nach der Verunreinigung:

$$S: t \mapsto S(t) = \frac{-36t}{t^2+16} + 6 \quad (t \geq 0 \text{ in Tagen})$$

Bei den Rechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.

3.1 Geben Sie den Sauerstoffgehalt S zu Beginn der Schadstoffeinleitung an und ermitteln Sie den Wert, auf den sich S langfristig einstellen wird. (3 BE)

3.2 Ermitteln Sie die Zeitintervalle, in denen der Sauerstoffgehalt steigt bzw. fällt und bestimmen Sie damit die Koordinaten des Extrempunktes von S. Interpretieren Sie die Koordinaten des Extrempunktes im Sachzusammenhang.
(Zur Kontrolle: $\dot{S}(t) = 36 \cdot \frac{t^2-16}{(t^2+16)^2}$) (8 BE)

3.3 Zeichnen Sie den Verlauf des Sauerstoffgehalts für die ersten 12 Tage in ein geeignetes Koordinatensystem. (4 BE)

3.4 Unterhalb eines Werts von 3 mg/l können Fische nicht überleben. Untersuchen Sie rechnerisch, ab welchem Zeitpunkt ein Fischsterben wegen Sauerstoffmangel zu erwarten ist und ab welchem Zeitpunkt der Sauerstoffgehalt ein Überleben der Fische wieder ermöglicht. (5 BE)