AII

1.0 Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion $f: x \mapsto \frac{x^3+3x^2}{2(x+2)^2}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f \subseteq \mathbb{R}$. Ihr Graph ist G_f.

1.1 Geben Sie D_f und die Art der Definitionslücke an und bestimmen Sie die Nullstellen von f. Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte von f bei Annäherung an die Definitionslücke. (5 BE)

1.2 Zeigen Sie, dass sich die Funktionsgleichung von f auch darstellen lässt durch $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{2}{(x+2)^2}$.
Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f an und untersuchen Sie rechnerisch, für welche Werte von x der Graph G_f oberhalb bzw. unterhalb der schiefen Asymptote verläuft. (6 BE)

1.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f und bestimmen Sie daraus die Art und die Koordinaten des Extrempunktes von G_f.

(Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{x^3+6x^2+12x}{2(x+2)^3}$) (9 BE)

1.4 Zeichnen Sie die Asymptoten von G_f für $-5 \leq x \leq 4$ in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie G_f in die Zeichnung. (5 BE)

1.5 G_f, die x-Achse, die schiefe Asymptote und die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $u > 1$ schließen ein Flächenstück ein. Schraffieren Sie das Flächenstück für $u = 3$ in der Zeichnung von Aufgabe 1.4 und ermitteln Sie die Maßzahl A(u) des Flächeninhalts in Abhängigkeit von u.
Untersuchen Sie rechnerisch, ob A(u) für $u \to \infty$ endlich ist. (7 BE)

2 Gegeben ist die reelle Funktion h durch $h(x) = \ln(g(x))$ mit $x \in D_h$. Dabei ist g eine quadratische Funktion, deren Graph eine nach oben geöffnete Parabel ist, die zwei verschiedene Schnittpunkte mit der x-Achse besitzt.
Entscheiden Sie, ob die nachfolgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie jeweils Ihre Aussagen.

a) Für die Definitionsmenge gilt: $D_h = \mathbb{R}$.
b) Die Funktion h besitzt genau zwei Nullstellen.
c) Der Graph von h besitzt genau einen Extrempunkt. (6 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung AII

3.0 Für Ausdauersportler ist die Laktatkonzentration L im Blut (in $\mathrm{mmol/l}$) ein Indikator für die Ausdauerleistungsfähigkeit. Bei Läufern wird auf dem Laufband die Laktatkonzentration in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v des Läufers (in $\mathrm{km/h}$) gemessen.
Die Messwerte von Läufer Max bei einem Laktattest lassen vermuten, dass die Werte nach einer Funktion der Form $L(v) = (0{,}02v - 0{,}25) \cdot e^{a \cdot v} + b$ für $0 \le v \le 19$ verlaufen.
Bei den Rechnungen kann auf Benennungen verzichtet werden. Die Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen zu runden.

3.1 Berechnen Sie die Werte für a und b, wenn die Laktatkonzentration bei Max in Ruhe $0{,}95\ \mathrm{mmol/l}$ und bei einer Geschwindigkeit von $7\ \mathrm{km/h}$ $0{,}65\ \mathrm{mmol/l}$ beträgt.
(Ergebnis: $a \approx 0{,}23;\ b = 1{,}20$) (4 BE)

3.2 Untersuchen Sie mithilfe der 1. Ableitung von L den Verlauf der Laktatkonzentration im Blut von Max und interpretieren Sie die Koordinaten des Extrempunktes im Sachzusammenhang.
(Teilergebnis: $L'(v) = (0{,}0046v - 0{,}0375) \cdot e^{0{,}23v}$) (8 BE)

3.3 Zeichnen Sie die Laktatkurve für $0 \le v \le 19$ in ein Koordinatensystem.
(Maßstab: $1\,\mathrm{cm} \mathrel{\hat{=}} 2\,\mathrm{km/h};\ 1\,\mathrm{cm} \mathrel{\hat{=}} 1\,\mathrm{mmol/l}$) (4 BE)

3.4 Der Laktattest dient auch dazu, die persönliche anaerobe Schwelle des Läufers zu ermitteln. Bei der anaeroben Schwelle reicht der aufgenommene Sauerstoff gerade noch aus, um den Energiebedarf in der Muskulatur zu decken.
Zur Bestimmung der anaeroben Schwelle gibt es unterschiedliche Modelle:
a) Die Steigung der Laktatkurve hat den Wert 1.
b) Die Laktatkonzentration im Blut beträgt $4\ \mathrm{mmol/l}$.
Bestimmen Sie die anaerobe Schwelle für Max nach beiden Modellen und vergleichen Sie die Werte. Verwenden Sie dazu für a) als Näherungsfunktion für die Laktatkonzentration $N(v) = e^{0{,}5v-7} + 1$ und lesen Sie den Wert für b) aus der Zeichnung von 3.3 ab. (6 BE)