BI

1.0 Die drei Sektoren U, V und W eines Unternehmens sind nach dem Leontief-Modell gemäß nachstehender Tabelle miteinander und mit dem Markt verflochten. Die Zahlenangaben erfolgen in Mengeneinheiten (ME).

	U	V	W	Markt	Produktion
U	90	20	12	a	150
V	0	b	12	28	200
W	c	0	84	6	120

1.1 Bestimmen Sie die Werte a, b und c und geben Sie deren Bedeutung an. (4 BE)

1.2 Berechnen Sie mithilfe der Inputmatrix A die Marktabgaben der einzelnen Sektoren bei einer Produktion von 100 ME im Sektor U, 150 ME im Sektor V und 80 ME im Sektor W. (3 BE)

1.3 Aufgrund von veränderten wirtschaftlichen Rahmenbedingungen entsteht die folgende Situation:

– Die Marktabgabe von Sektor V sinkt auf 10 ME,

– die gesamte Produktion von Sektor U verbleibt im Unternehmen,

– Die Sektoren V und W produzieren gleich viel.

Ermitteln Sie den neuen Konsumvektor und den neuen Produktionsvektor. (5 BE)

1.4 Aufgrund neuer technischer Entwicklungen entsteht für die Produktion eine neue Technologie. Dies führt zu einer gänzlich neuen Inputmatrix, bei der zwei Einträge aufgrund nicht abgeschlossener Umstrukturierungen noch variabel sind:

$A_{neu} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & t \\ 0,1 & 0,1 & 0 \\ 0,05 & t-0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$; es wird die Produktion

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ angestrebt.

Ermitteln Sie hierfür das größtmögliche Intervall der t-Werte. (7 BE)

Fortsetzung nächste Seite

2.0 In einem Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(-4|0|0)$, $B(-1|-1|1)$ und $C(0|-3|1)$ sowie die Ebenenschar $F_a: -2x_1 + ax_2 + 5x_3 + 8 = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$ gegeben.

2.1 Die drei Punkte A, B und C spannen die Ebene E auf. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameter- und Koordinatenform.
(Mögliches Teilergebnis: $E: 4x_1 + 2x_2 - 10x_3 + 16 = 0$) (5 BE)

2.2 Ermitteln Sie die gegenseitige Lage der Ebenen E und F_a in Abhängigkeit von a.
(4 BE)

2.3 Bestimmen Sie den Wert a so, dass die zugehörige Ebene F_a den Punkt $Z(-2|1|-3)$ enthält. (2 BE)

2.4.0 Im Folgenden gilt: $a = 3$.
Die zugehörige Ebene F_3 lautet somit: $F_3: -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 8 = 0$.

2.4.1 Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und F_3.
(mögliches Ergebnis: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$) (4 BE)

2.4.2 Der Punkt A' entsteht durch Spiegelung des Punktes A am Punkt Z aus 2.3. Berechnen Sie die Koordinaten von A'. (2 BE)

2.4.3 Die Ebene J wird durch die Gerade s und den Punkt $A'(0|2|-6)$ festgelegt. Geben Sie eine Gleichung von J an.
Die nebenstehende Skizze zeigt die Ebenen E und J. Übertragen Sie die Zeichnung auf Ihr Blatt und ergänzen Sie die Zeichnung durch die Ebene F_3 sowie die Punkte A, A' und Z. (4 BE)