

1.1

$$g(0) = 108 \Rightarrow a = 108 \quad \checkmark$$

$$g(10) = 220 \Rightarrow (108 - 27) \cdot e^{10b} = 220 \quad \checkmark$$

$$81 \cdot e^{10b} = 220$$

$$e^{10b} = 2,716 \quad \checkmark$$

$$10b = \ln 2,716 = 1$$

$$b = 0,1 \quad \checkmark$$

(4P)

$a = 108 \text{ m}^3$ ist die anfängliche Förderrate. $\checkmark$

1.2

$$g(t) = (108 - 2,7t) e^{0,1t} \stackrel{>0}{=} 0 \quad \checkmark \Rightarrow 108 - 2,7t = 0 \quad \checkmark$$

$$2,7t = 108$$

$$t = 40 \quad \checkmark$$

Nach 40 Jahren, ^{also 2052,} ist das Feld vollständig abgebaut. $\checkmark$

(3P)

1.3

$$\dot{g}(t) = -2,7 \cdot e^{0,1t} + 0,1(108 - 2,7t) e^{0,1t} \quad \checkmark$$

$$= (8,1 - 0,27t) e^{0,1t} \quad \checkmark$$

$$\dot{g}(t) = 0 \quad \checkmark \Rightarrow 0,27t = 8,1$$

$$t = 30 \quad \checkmark$$

(6P)

$$\ddot{g}(t) = -0,27 \cdot e^{0,1t} + (0,81 - 0,027t) e^{0,1t} \quad \checkmark$$

$$= (0,54 - 0,027t) e^{0,1t} \quad \checkmark$$

$$\ddot{g}(30) = -0,27 \cdot e^3 < 0 \quad \checkmark \Rightarrow \text{Nach 30 Jahren, also im Jahre 2042, wird die Förderrate am größten sein.} \quad \checkmark$$

$$\text{Sie beträgt dann } g(30) = 542,31 \text{ m}^3/\text{a} \quad \checkmark$$

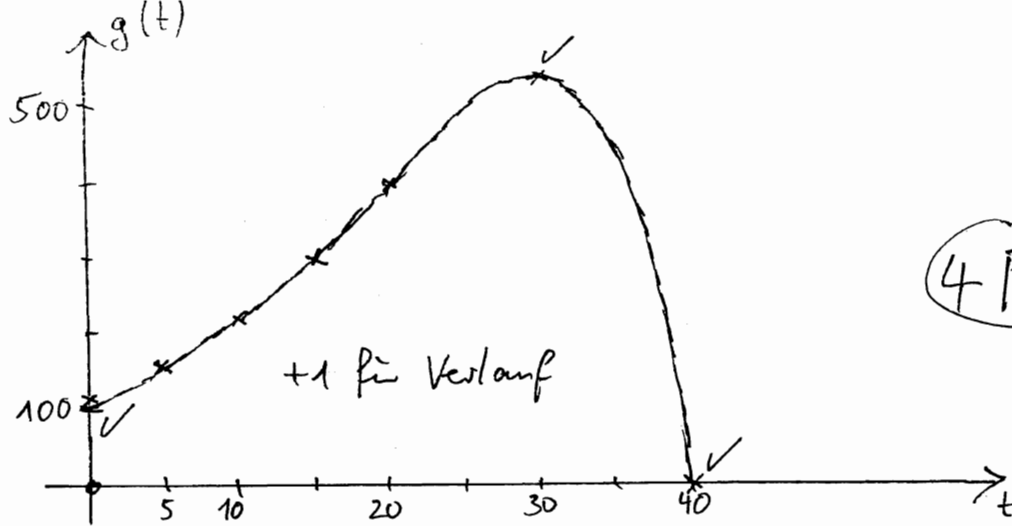
Alternative zu $\ddot{g}$:

	$0 \leq t < 30$	30	$30 < t \leq 40$	
$8,1 - 0,27t$	+	0	-	$\checkmark$
$e^{0,1t}$	+	+	+	$\checkmark$
$\dot{g}(t)$	+	0	-	$\checkmark$
$g(t)$	steigt	Max.	fällt	$\checkmark$

Weitere Alternative:

Die Wertetabelle zeigt steigende ^{pos.} Werte, die aber nach 40 Jahren auf 0 gesunken sind

$\Rightarrow$ bei $t = 30$ muss ein Maximum vorliegen! $\checkmark \checkmark$



1.4

(4P)

$$G(t) = (1350 - 27t) \cdot e^{0,1t}$$

$$\dot{G}(t) = -27 \cdot e^{0,1t} + 0,1(1350 - 27t)e^{0,1t} \checkmark$$

$$= (108 - 2,7t) e^{0,1t} = g(t) \checkmark$$

$$\int_0^{40} g(t) dt = \left[(1350 - 27t) e^{0,1t} \right]_0^{40} \checkmark$$

$$= 270 \cdot e^4 - 1350 = 13391,5 \checkmark$$

(5P)

Insgesamt werden bis zum Versiegen des Gasfeldes etwa $13,4 \cdot 10^9 \text{ m}^3$ Gas gefördert. ✓

$$h(x) = \frac{(x-1)(5x-0,5x)}{x^2-1}$$

2.1

$$D(h) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}, \text{ denn } \begin{aligned} x^2-1 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x_{1/2} &= \pm 1 \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nullstellen von } h: -0,5x^2+3x &= 0 \\ -0,5x(x-6) &= 0 \checkmark \\ x_3 &= 0; x_4 = 6 \checkmark \end{aligned}$$

(6P)

$\Rightarrow x_1 = 1$ ist eine hebbare Lücke. $\checkmark$
 $x_2 = -1$ ist eine Polstelle (einfach). $\checkmark$

2.2.1

$$\begin{aligned} (-0,5x^2+3x+0) : (x+1) &= -0,5x+3,5 - \frac{3,5}{x+1} \\ \frac{-0,5x^2-0,5x}{3,5x+0} &\checkmark\checkmark \\ \frac{3,5x+3,5}{-3,5} &= -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} - \frac{3,5}{x+1} \end{aligned}$$

(4P)

$$\text{oder } \frac{(-x+7)(x+1)-3,5 \cdot 2}{2(x+1)} = \frac{-x^2+6x}{2(x+1)} = \frac{-0,5x^2+3x}{x+1} = f(x) \checkmark$$

Asymptoten: $x = -1$ (senkrecht) $\checkmark$
 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ (schief) $\checkmark$

2.2.2

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+1)(-x+3) - (-0,5x^2+3x) \cdot 1}{(x+1)^2} = \checkmark \\ &= \frac{-x^2+2x+3+0,5x^2-3x}{(x+1)^2} = \frac{-0,5x^2-x+3}{(x+1)^2} \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow x^2+2x-6 = 0 \quad D = 28 \checkmark \\ x_{5/6} &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = -1 \pm \sqrt{7} \\ x_5 &\approx 1,65; x_6 \approx -3,65 \checkmark \end{aligned}$$

(8P)

	$x < -3,65$	$-3,65 < x < -1$	$-1 < x < 1,65$	$x > 1,65$	
$-0,5x^2-x+3$	-	0	+	0	-
$(x+1)^2$	+	+	0	+	+
$f'(x)$	-	0	n.def.	+	0
$G(f)$	fällt	TIP	steigt	n.def.	steigt
				HOP	fällt

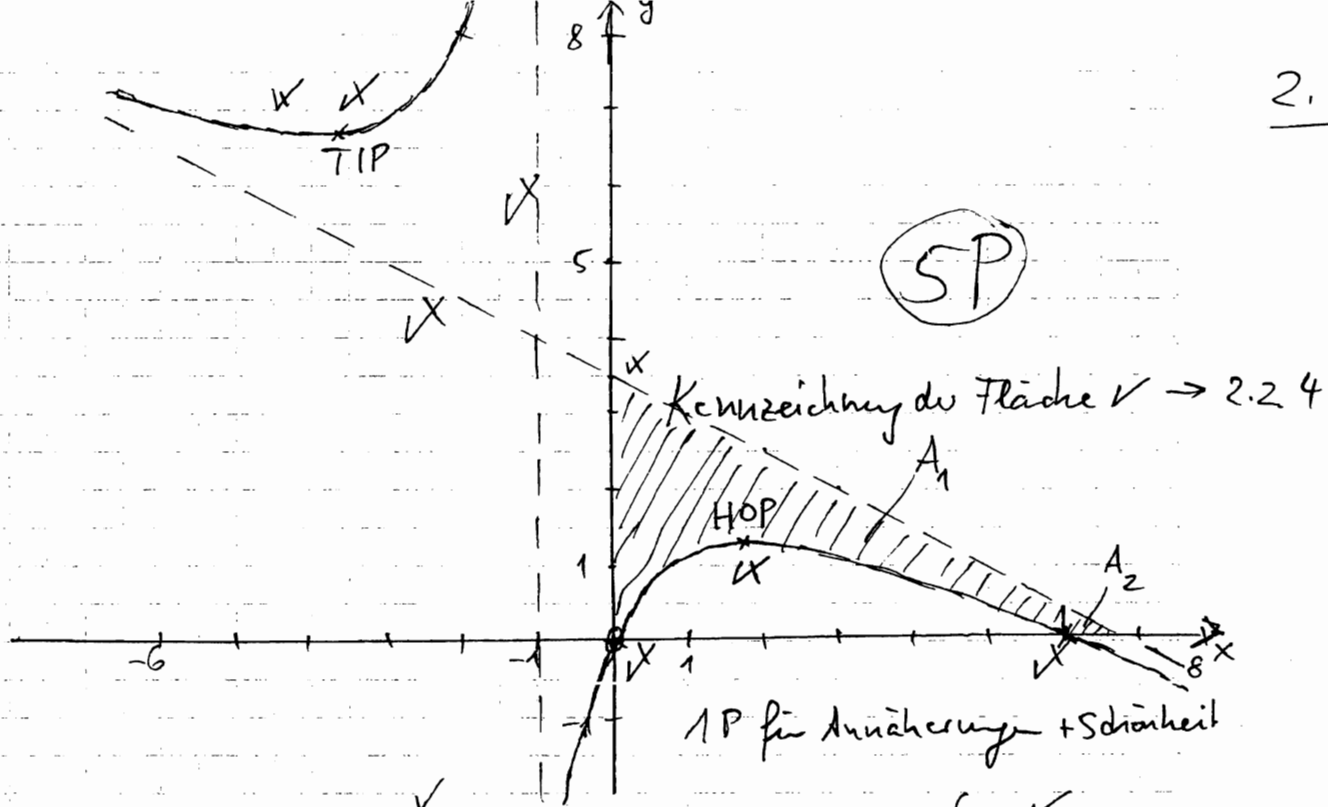
TIP $(-3,65 | 6,65)$; HOP $(1,65 | 1,35)$

$$\text{oder } f''(x) = \frac{(x+1)(-x-1) - (-0,5x^2-x+3) \cdot 2}{(x+1)^3} = \frac{-7}{(x+1)^3} \checkmark$$

$f''(-3,65) > 0 \Rightarrow$ bei $x = -3,65$ TIP $\checkmark$

$f''(1,65) < 0 \Rightarrow$ bei $x = 1,65$ HOP $\checkmark$

2.2.3



$$A = A_1 + A_2 = \int_0^6 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} - f(x) \right) dx + \frac{1}{4} = \int_0^6 \frac{3,5}{x+1} dx + \frac{1}{4}$$

$$= \left[3,5 \ln(x+1) \right]_0^6 + \frac{1}{4} = 3,5 \ln 7 + \frac{1}{4} \approx 7,06$$

7P

$$g(2) = 0 \Rightarrow \ln(4a+2b) = 0 \Rightarrow \text{I. } 4a+2b = 1$$

$$g'(3) = 0 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{ax^2+bx} (2ax+b) \Rightarrow \text{II. } \frac{6a+b}{9a+3b} = 0 \Rightarrow b = -6a$$

$$b = -6a \text{ in I: } 4a - 12a = 1 \Rightarrow -8a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{8} \Rightarrow b = \frac{3}{4}$$

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}}{-\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x}$$

$$g''(x) = \frac{\left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x \right) \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) - \left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \right) \left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \right)}{\left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x \right)^2}$$

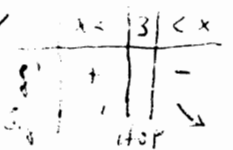
$$= \frac{\frac{1}{32}x^2 - \frac{3}{16}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{9}{16}}{\left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x \right)^2} = \frac{-\frac{1}{32}x^2 + \frac{3}{16}x - \frac{9}{16}}{\left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x \right)^2}$$

$$g''(3) < 0 \Rightarrow \text{bei } x=3 \text{ liegt ein HOP vor}$$

Alternative: Argument bests nach unten offene Parabel
 $\Rightarrow$ HOP auch bei 6g

3.2

besten:
 Plausibilität



Alternative zu Analysis 2.2.4

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{7} \cdot \underbrace{3,5} - \int_0^6 f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(x) dx &= \left[-\frac{1}{4}x^2 + \underbrace{\frac{7}{2}}x - 3,5 \underbrace{\ln(x+1)} \right]_0^6 \\ &= (-9 + 21 - 3,5 \ln 7) - 0 \approx 5,19 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$A = 12,25 - 5,19 = 7,06 \quad \checkmark$$