AI 2015

1.0 Im Jahre 2012 ist die Gasförderung im Feld „*Clipper South*" in der südlichen britischen Nordsee angelaufen. Eine Planung für die kommenden Jahre sieht folgende Förderraten g(t) vor:

t	0	5	10	15	20
g(t)	108	156	220	300	400

Dabei ist t die Zeit in Jahren seit Förderbeginn und g(t) die Förderrate in Millionen m^3 pro Jahr.
Bis zum vollständigen Abbau des Erdgasfeldes soll sich die Förderrate modellhaft durch die Funktion g mit $g(t) = (a - 2{,}7 \cdot t) \cdot e^{b \cdot t}$, $a, b \in \mathbb{R}$, beschreiben lassen.
Bei den Rechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

1.1 Bestimmen Sie die Parameter a und b mit Hilfe der Planungsdaten für $t = 0$ und $t = 10$ und interpretieren Sie den Wert von a im Sachzusammenhang.
(Teilergebnis: $a = 108$; $b = 0{,}1$) (4 BE)

1.2 Ermitteln Sie das Jahr, in dem die Förderrate nach dem Modell auf den Wert 0 abgesunken und damit das Feld vollständig abgebaut sein wird. (3 BE)

1.3 Berechnen Sie, in welchem Jahr die Förderrate am größten sein wird, und geben Sie diese an.
(Teilergebnis: $\dot{g}(t) = (8{,}1 - 0{,}27t) \cdot e^{0{,}1t}$) (6 BE)

1.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g in ein geeignetes Koordinatensystem. (4 BE)

1.5 Zeigen Sie, dass die Funktion G mit $G(t) = (1350 - 27t) \cdot e^{0{,}1t}$ eine Stammfunktion von g ist und berechnen Sie das Integral $\int_0^{40} g(t)\,dt$. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. (5 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung AI

2.0 Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion $h: x \mapsto \frac{(x-1)(3x-0{,}5x^2)}{x^2-1}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_h \subset \mathbb{R}$.

2.1 Bestimmen Sie D_h sowie die Nullstellen von h und geben Sie die Art der Definitionslücken von h an. (6 BE)

2.2.0 Im Folgenden wird die stetige Fortsetzung $f: x \mapsto \frac{-0{,}5x^2+3x}{x+1}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ der Funktion h betrachtet (Nachweis nicht erforderlich). Ihr Graph ist G_f.

2.2.1 Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm von f durch $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} - \frac{3{,}5}{x+1}$ darstellen lässt und geben Sie die Gleichungen und die Art aller Asymptoten von G_f an. (4 BE)

2.2.2 Ermitteln Sie die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f. Runden Sie die Koordinaten auf zwei Nachkommastellen.

(Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-0{,}5x^2-x+3}{(x+1)^2}$) (8 BE)

2.2.3 Zeichnen Sie die Asymptoten und G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $-6 \le x \le 8$ in ein Koordinatensystem. (5 BE)

2.2.4 G_f, die schiefe Asymptote und die beiden Koordinatenachsen schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der Zeichnung von 2.2.3 und ermitteln Sie seine Flächenmaßzahl auf zwei Nachkommastellen gerundet. (7 BE)

3.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \ln(ax^2+bx)$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$. g besitzt eine Nullstelle $x_N = 2$ und eine Extremstelle $x_E = 3$.

3.1 Berechnen Sie die Werte a und b.

(Ergebnis: $a = -\frac{1}{8}$; $b = \frac{3}{4}$) (5 BE)

3.2 Bestimmen Sie die Art des Extrempunktes des Graphen von g. (3 BE)