A II

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 4 + \frac{8x-12}{(x-2)^2}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset IR$. Ihr Graph heißt G_f.

1.1 Geben Sie die D_f an. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion an den Rändern der Definitionsmenge und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten an. (5 BE)

1.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von G_f mit der waagrechten Asymptote. (2 BE)

1.3 Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm auch in der Form $f(x) = \frac{4(x-1)^2}{(x-2)^2}$ darstellen lässt, und ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen. (4 BE)

1.4 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von f und ermitteln Sie daraus Art und Lage des Extrempunktes. (7 BE)

[Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-8x+8}{(x-2)^3}$]

1.5 Zeichnen Sie den Graphen G_f und seine Asymptoten unter Berücksichtigung aller bisheriger Ergebnisse für $-6 \leq x \leq 10$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (6 BE)

1.6 Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = 4x + 8\ln(2-x) - \frac{4}{x-2}$ in $D_F =]-\infty; 2[$ eine Stammfunktion von f ist.

Der Graph G_f schließt mit seiner waagrechten Asymptote und der y-Achse im 1. Quadranten eine endliche Fläche ein. Schraffieren Sie diese Fläche in der Zeichnung von Teilaufgabe 1.5 und berechnen Sie die Maßzahl ihres Flächeninhalts. (7 BE)

2 Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto \ln(g(x))$ mit $g(x) = x^3 + x^2$ und $D_g = IR$, folglich ergibt sich: $h(x) = \ln(x^3 + x^2)$.

Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge $D_h \subset IR$ der Funktion h sowie das Verhalten der Funktion h an den Rändern ihrer Definitionsmenge. (7 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung A II

3.0 Computerviren sind Programme, die sich über das Internet rasch verbreiten und von ihnen infizierte Rechner schädigen oder zerstören. Wird ein neuer Virus in Umlauf gebracht, verbreitet er sich zunächst rasch. Die Infizierungsrate I beschreibt die Anzahl der Computer, die sich pro Tag neu infizieren, und kann näherungsweise durch den Funktionsterm

$I(t) = 1000 \cdot t^2 \cdot e^{a \cdot t}$ mit $t \geq 0$; $a \in IR$ beschrieben werden.

Die Zeit t wird in Tagen angegeben, wobei t = 0 derjenige Zeitpunkt ist, an dem der neue Virus in Umlauf gebracht wird.
Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.
Ergebnisse sind sinnvoll zu runden.

3.1 Berechnen Sie den Wert für a auf 3 Dezimalstellen gerundet, wenn nach 24 Stunden die Infizierungsrate bei 779 Computern pro Tag liegt. (2 BE)
[Ergebnis: a = −0,250]

3.2 Bestimmen Sie den Grenzwert von I für $t \to \infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. (3 BE)

3.3 Bestimmen Sie die Zeitintervalle, in denen die Infizierungsrate zunimmt bzw. abnimmt, und ermitteln Sie die maximale Infizierungsrate.
[Teilergebnis: $\dot{I}(t) = 250 \cdot (8t - t^2) \cdot e^{-0{,}25t}$] (8 BE)

3.4 Zeichnen Sie den Graph von I für die ersten 20 Tage in ein Koordinatensystem.
(Maßstab: t-Achse: 1cm $\hat{=}$ 2 Tage
I-Achse: 1cm $\hat{=}$ 1000 $\frac{\text{infizierte Computer}}{\text{Tag}}$) (4 BE)

3.5 Kennzeichnen Sie die durch das bestimmte Integral $A = \int_4^8 I(t)dt$ beschriebene Fläche im Koordinatensystem von Teilaufgabe 3.4 und schätzen Sie dessen Wert durch geometrische Betrachtung näherungsweise ab. Achten Sie dabei auf eine klare Darstellung Ihrer Vorgehensweise. Interpretieren Sie die Bedeutung des ermittelten Wertes im Sachzusammenhang. (5 BE)