- 1.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \frac{2(x+1)^2}{x^2-1}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$.
- 1.1 Geben Sie D_g an, prüfen Sie g auf Nullstellen und folgern Sie daraus die Art der Definitionslücken. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte bei Annäherung an die Definitionslücken. (7 BE)
- 1.2.0 Die Funktion $f: x \mapsto \frac{2(x+1)}{x-1}$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ist die stetige Fortsetzung der Funktion g (Nachweis nicht erforderlich). Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.
- 1.2.1 Geben Sie Art und Gleichungen aller Asymptoten von G_f an und untersuchen Sie, ob sich der Graph der Funktion f für $x \rightarrow +\infty$ der Asymptote von oben oder unten nähert. (5 BE)
- 1.2.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von f und geben Sie die Wertemenge von f an.
[mögliches Teilergebnis: $f'(x) = -\frac{4}{(x-1)^2}$] (4 BE)
- 1.2.3 Zeichnen Sie G_f und seine Asymptoten unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse für $-4 \leq x \leq 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (4 BE)
- 1.2.4 Der Graph G_f , die y -Achse und die Geraden $y = 2$ und $x = a$ mit dem reellen Parameter $a < -1$ begrenzen ein Flächenstück A .
Kennzeichnen Sie diese Fläche für $a = -3$ im Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.2.3 und berechnen Sie deren Flächenmaßzahl $A(a)$ in Abhängigkeit von a .
[mögliches Ergebnis: $A(a) = 4 \ln(1-a)$] (5 BE)
- 1.2.5 Untersuchen Sie, ob $A(a)$ für $a \rightarrow -\infty$ einen endlichen Wert annimmt. (2 BE)
- 1.2.6 Die Funktion F ist eine Stammfunktion der Funktion f . Geben Sie nur mit den bisherigen Ergebnissen die maximalen Monotonieintervalle des Graphen der Funktion F für $x < 1$ an. (3 BE)
- 2.0 Die Funktion n beschreibt näherungsweise die zeitliche Entwicklung der Einwohnerzahl einer fränkischen Kleinstadt. Es gilt hierfür die Funktionsgleichung $n(t) = b(-e^{-0,05t} + e^{-0,25t} + 1,5)$ mit $t \geq 0$, $b \in \mathbb{R}$.
Der Zeitpunkt $t = 0$ wird auf den 1.1.1995 festgelegt. Dabei gibt n die Einwohnerzahl in Tausend und t die Zeit in Jahren an. Auf Einheiten soll bei den Rechnungen verzichtet werden. Runden Sie die Ergebnisse sinnvoll.
- 2.1 Am 1.1.1999 hatte die Stadt 20983 Einwohner. Bestimmen Sie damit den Wert des Parameters b .
[Ergebnis: $b \approx 20$] (2 BE)

Fortsetzung A I

- 2.2 Berechnen Sie Art und Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen der Funktion n und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im gegebenen Sachzusammenhang.

[mögliches Teilergebnis: $\dot{n}(t) = e^{-0,05t} - 5e^{-0,25t}$] (7 BE)

- 2.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion n in ein geeignetes Koordinatensystem. (4 BE)

- 2.4 Zum 1.1.2010 konnte die Stadt Fördergelder beantragen. Diese richteten sich nach der durchschnittlichen Einwohnerzahl der Stadt während der vergangenen 15 Jahre. Ermitteln Sie die Höhe der Fördermittel, wenn es pro durchschnittlichem Einwohner 500 € an Fördergeldern gab, indem Sie zunächst das Integral

$$I = \int_0^{15} n(t) dt \text{ berechnen.}$$

[Teilergebnis: $I \approx 317$] (5 BE)

- 3.0 Die subjektive Empfindung der Tonhöhe Z des menschlichen Gehörs in Abhängigkeit von der Frequenz x in Hertz (Hz) kann durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$Z(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 < x \leq 427 \\ 1127 \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{700}\right) - 110 & \text{für } 427 < x \leq 19000 \end{cases}$$

Die Einheit der Tonhöhe Z ist 1mel. Runden Sie die Ergebnisse auf ganze Zahlen. Auf das Mitführen von Einheiten kann verzichtet werden.

- 3.1 Zeigen Sie, dass die Funktion Z an der Nahtstelle $x = 427$ - im Rahmen der Rundungsgenauigkeit - stetig und differenzierbar ist. (5 BE)

- 3.2 Berechnen Sie die Frequenz x , bei der die Tonhöhe von 1400 mel empfunden wird. (3 BE)

- 3.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion Z im Bereich $0 < x \leq 2200$.

(Maßstab: waagrechte Achse: $1\text{cm} \triangleq 200\text{ Hz}$

senkrechte Achse: $1\text{cm} \triangleq 200\text{ mel}$) (4 BE)