A II

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{2x+1}{x^3}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Geben Sie D_f und die Art der Definitionslücke von f an und bestimmen Sie die Nullstelle von f. (3 BE)

1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte an den Rändern von D_f und geben Sie Art und Gleichungen aller Asymptoten von G_f an. (5 BE)

1.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f und bestimmen Sie Art und Koordinaten des Extrempunktes von G_f.
[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-4x-3}{x^4}$] (7 BE)

1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und mittels geeigneter zusätzlicher Funktionswerte G_f für $-5 \le x \le 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (5 BE)

1.5 Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm f(x) auch durch $f(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ darstellen lässt und bestimmen Sie eine Stammfunktion F der Funktion f mit $D_F = D_f$. (3 BE)

1.6 Der Graph G_f, die Geraden $x = 1$, $x = b$ $(b > 1)$ und die x-Achse schließen ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück für b = 4 im Koordinatensystem der Teilaufgabe 1.4. Zeigen Sie, dass sich für die Maßzahl des Flächeninhalts $A(b) = -\frac{2}{b} - \frac{0{,}5}{b^2} + 2{,}5$ ergibt. Bestimmen Sie den Grenzwert von A(b) für $b \to \infty$. (6 BE)

2.0 Zum Ende des Jahres 1995 (Zeitpunkt t = 0) lebten laut der Organisation der Vereinten Nationen (UNO) 5,74 Milliarden Menschen auf der Erde. Ende 2016 hatte die Erdbevölkerung gegenüber t = 0 um 29,1% zugenommen. Mit der vereinfachenden Annahme einer exponentiellen Entwicklung gilt für die Gesamtzahl N der Weltbevölkerung in Milliarden in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren die Gleichung $N(t) = a \cdot e^{bt}$ mit $t \ge 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

2.1 Bestimmen Sie aus den obigen Angaben die Parameter a und b.
[Ergebnisse: $a = 5{,}74$; $b \approx 0{,}01216$] (4 BE)

2.2 Berechnen Sie, wie viele Menschen zum Ende des Jahres 2005 nach dem Modell von 2.0 auf der Erde lebten.

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung A II

Vergleichen Sie das Ergebnis mit der tatsächlichen Weltbevölkerung Ende 2005 von 6,52 Milliarden (UNO), indem Sie die prozentuale Abweichung berechnen und bewerten Sie damit die Güte des Modells.
Geben Sie außerdem stichpunktartig drei Gründe an, die eine genaue Ermittlung der weltweiten Bevölkerungszahl erschweren. (6 BE)

2.3 Ermitteln Sie, um wie viele Menschen die Weltbevölkerung voraussichtlich im Jahr 2017 zunehmen wird. (2 BE)

2.4 Bestimmen Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion $\dot{N}$ und berechnen Sie $\dot{N}(21)$. Interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang und vergleichen Sie ihn mit Ihrem Ergebnis der Teilaufgabe 2.3. (4 BE)

2.5 Bestimmen Sie das Jahr, in dem sich die Weltbevölkerung gegenüber dem 31.12.1995 nach dem Modell von 2.0 verdoppelt haben wird. (3 BE)

2.6 Berechnen Sie, welche Bevölkerungszahl sich am Ende des Jahres 2052 ergeben würde, wenn man - in einem anderen Szenario - ab Ende des Jahres 2016 von einer linearen Zunahme um 90 Mio. pro Jahr ausgeht. (3 BE)

3.0 Gegeben ist die Funktion $k: x \mapsto \dfrac{x^2}{4\ln(2x+4)}$, ihre Ableitungsfunktion k' und die Funktion $h: x \mapsto \dfrac{1}{k(x)}$ jeweils in ihren maximalen reellen Definitionsmengen.

3.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Funktion k gilt: $D_k = \left]-2;\infty\right[\setminus\{-1{,}5\}$. (3 BE)

3.2 Ordnen Sie jedem Graphen der Bilder a, b und c einer der Funktionen k, k' oder h zu und begründen Sie Ihre Wahl. (4 BE)

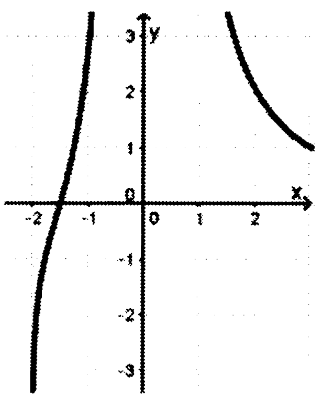

Bild a

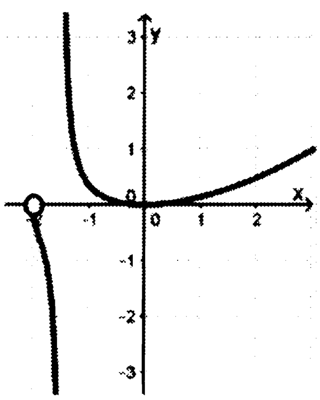

Bild b

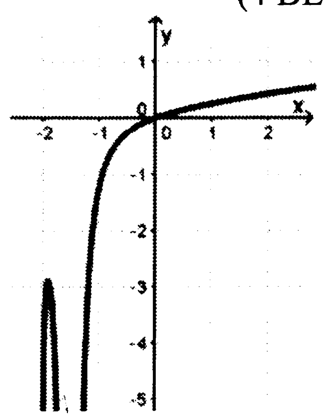

Bild c

3.3 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von k(x) für $x \to \infty$. (2 BE)