A I

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion f durch $f(x)=(x^2-2x-3)e^{-0,5x}=(x+1)(x-3)e^{-0,5x}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f=\mathbb{R}$. Ihr Graph ist G_f. Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen.

1.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktion f an und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x\to+\infty$ und $x\to-\infty$. (4 BE)

1.2 Berechnen Sie Art und Koordinaten aller Extrempunkte von G_f. (6 BE)
[mögliches Teilergebnis: $f'(x)=-0,5(x^2-6x+1)e^{-0,5x}$]

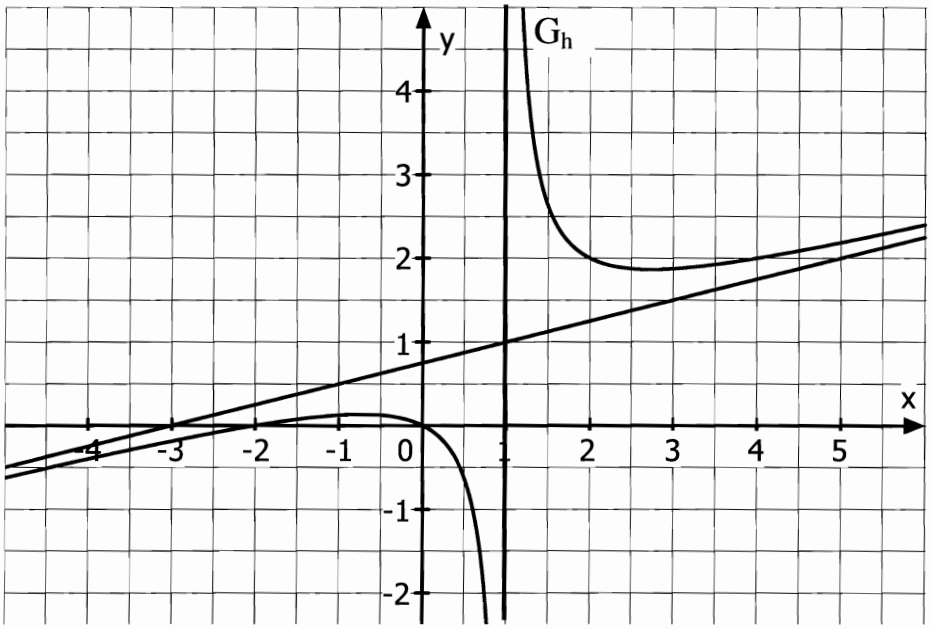
1.3 Zeichnen Sie G_f für $-2\le x\le 12$ unter Verwendung vorliegender Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem. (5 BE)

1.4 Gegeben ist die Funktion $g: x\mapsto 5e^{-0,5x}$. Ihr Graph ist G_g. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen G_f und G_g und zeichnen Sie den Graphen G_g in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 1.3 ein.
[Teilergebnis: $x_1=-2$ und $x_2=4$] (5 BE)

1.5 Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x\mapsto F(x)=-2e^{-0,5x}(x+1)^2$ mit $D_f=D_F$ eine Stammfunktion der Funktion f ist. (3 BE)

1.6 Die Graphen G_f und G_g schließen ein endliches Flächenstück ein, das in allen vier Quadranten liegt. Schraffieren Sie dieses im Koordinatensystem der Teilaufgabe 1.3 und berechnen Sie die zugehörige Flächenmaßzahl auf zwei Nachkommastellen gerundet. (5 BE)

2.0 Die Abbildung zeigt den Graphen einer gebrochen-rationalen Funktion $h: x\mapsto h(x)=0,25x+0,75+\frac{a}{x+b}$, $D_{h,max}\subset\mathbb{R}$ mit seiner schiefen Asymptote $y=0,25x+0,75$ und der weiteren Asymptote x = 1. Es gilt $a,b\in\mathbb{R}$. Alle abzulesenden Werte sind ganzzahlig.



Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung A I

2.1 Aus der Gleichung der schiefen Asymptote können $\lim\limits_{x\to\infty}(h(x)-(0{,}25x+0{,}75))$ und $\lim\limits_{x\to\infty} h'(x)$ gefolgert werden. Geben Sie diese Grenzwerte an und begründen Sie Ihre Ergebnisse. (4 BE)

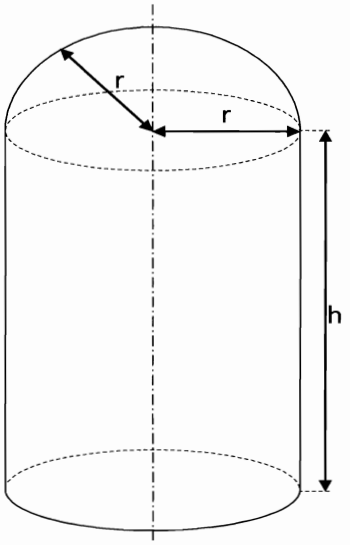
2.2 Für diese Teilaufgabe gilt $x > 1$. Lesen Sie aus der Abbildung die Lösungsmenge der Ungleichung $h(x) < 2$ ab. (2 BE)

2.3 Bestimmen Sie die Parameter a und b und geben Sie die Funktionsgleichung der Funktion h an. (3 BE)

2.4 Gegeben ist die Funktion k mit $k(x)=\ln\big(h(x)\big)$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_k \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph ist G_k. Geben Sie die Definitionsmenge D_k von k und die Gleichungen der senkrechten Asymptoten von G_k an. (4 BE)

3.0

In hochwertige Edelstahlfläschchen sollen jeweils 100 cm^3 Parfüm abgefüllt werden. Die Form des Fläschchens ist durch einen geraden Kreiszylinder mit einer oben aufgesetzten Halbkugel vorgegeben. Die Aussparung für den Sprühkopf wird nicht berücksichtigt. Für die Oberfläche O (in cm^2) des Fläschchens in Abhängigkeit von seinem Radius r (in cm) erhält man die Funktionsgleichung $O(r)=\frac{5}{3}\pi r^2+\frac{200}{r}$ mit der Definitionsmenge $D_O =]0;\ 3{,}5]$. Auf die Mitführung von Einheiten wird verzichtet. Runden Sie gegebenenfalls Ihre Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma.



3.1 Bestimmen Sie das Verhalten von O(r) für $r \to 0$. (2 BE)

3.2 Berechnen Sie den Radius r, für den die Oberfläche O den absolut kleinsten Wert annimmt, und bestätigen Sie, dass $O_{min} \approx 112{,}23$ (cm^2) gilt. (7 BE)

3.3 Erstellen Sie für $1 \le r \le 3{,}5$ eine Wertetabelle mit der Schrittweite $\Delta r = 0{,}5$. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion O in ein Koordinatensystem im angegebenen Bereich. Wählen Sie hierfür einen geeigneten Maßstab. (5 BE)

3.4 Der Parfümhersteller möchte aus optischen Gründen den Radius r = 2 (cm) wählen. Berechnen Sie dafür den Mehrbedarf an Edelstahlblech im Vergleich zu O_{min} in Prozent. Begründen Sie stichhaltig, dass für alle Radien mit $r \in [2;\ 3{,}5]$ weniger als 10% Mehrbedarf an Blech im Vergleich zu O_{min} benötigt werden. (5 BE)