1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{2(x-3)(x-2)}$ in der maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$.

1.1 Ermitteln Sie die Art der beiden Definitionslücken. (4 BE)

1.2 Zeigen Sie, dass gilt: $(x^3 - 3x^2 + 4) : (x-2) = x^2 - x - 2$.
Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen. (4 BE)

1.3.0 Im Folgenden wird die Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{2}x + 1 + \frac{2}{x-3}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ betrachtet. Ihr Graph heißt G_g.

1.3.1 Stellen Sie durch geeignete Umformung den Zusammenhang zwischen den Funktionen f aus 1.0 und g aus 1.3.0 her. Geben Sie die Bedeutung der Funktion g für die Funktion f an. (3 BE)

1.3.2 Geben Sie die Nullstellen von g und die Gleichungen sowie die Art der Asymptoten des Graphen G_g an. (3 BE)

1.3.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f und geben Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen G_g an. (7 BE)

[mögliches Teilergebnis: $g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{(x-3)^2}$]

1.3.4 Zeichnen Sie G_g mit seinen Asymptoten für $-2 \leq x \leq 8$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (5 BE)

1.3.5 Bestimmen Sie die Wertemenge der Ableitungsfunktion g'. (3 BE)

1.3.6 Der Graph G_g schließt mit der x-Achse ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl dessen Flächeninhalts. (4 BE)

2.0 Betrachtet wird nun die Funktion $h: x \mapsto \ln(2 \cdot g(x))$ in der Definitionsmenge $D_h =]-1; 2[\cup]3; \infty[$, wobei $g(x)$ der Funktionsterm aus Teilaufgabe 1.3.0 ist. Der Graph von h heißt G_h.

2.1 Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte h(x) bei Annäherung an die Grenzen der Definitionsmenge. (4 BE)

2.2 Zeigen Sie, dass für die Wertemenge von h gilt: $W_h = \mathbb{R} \setminus]0; \ln(9)[$.
Verwenden Sie dazu auch die bisherigen Ergebnisse von Aufgabe 1.3 und Aufgabe 2.1. (4 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung AII

3.0 Zur Bekämpfung von Schädlingsfliegen werden auf einer Insel unfruchtbare Fliegen-Männchen ausgesetzt. Im Folgenden wird die gesamte Fliegenpopulation p in Abhängigkeit von der Zeit $t \geq 0$ durch $p(t) = 10 \cdot e^{-0{,}002t^2+0{,}06t+c}$ mit $c \in IR$ modelliert. Dabei ist $t = 0$ der Zeitpunkt, zu dem die Kiste mit den unfruchtbaren Fliegen-Männchen geöffnet wird. Die Population p wird in Millionen Stück und die Zeit t in Tagen angegeben. Auf das Mitführen von Einheiten kann verzichtet werden. Alle Ergebnisse sind auf zwei Nachkommastellen zu runden.

3.1 Beim Öffnen der Kiste beträgt die Gesamtpopulation inklusive der ausgesetzten Männchen 6,38 Millionen Fliegen. Berechnen Sie den Wert des Parameters c auf zwei Nachkommastellen gerundet. (2 BE)
[Ergebnis: $c = -0{,}45$]

3.2 Zeigen Sie, dass die Population nach einigen Tagen ihren absoluten Höchststand erreicht. Bestimmen Sie diesen Höchststand und den dazugehörigen Zeitpunkt. (4 BE)
[mögliches Teilergebnis: $\dot{p}(t) = (0{,}6 - 0{,}04t) \cdot e^{-0{,}002t^2+0{,}06t-0{,}45}$]

3.3 Zum Zeitpunkt $t_W = 30{,}81$ (Tage) weist die Funktion p eine Wendestelle auf (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die Differenz $p(t_W + 0{,}5) - p(t_W - 0{,}5)$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang. (3 BE)

3.4 Zeichnen Sie für $0 \leq t \leq 60$ auch unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen von p. Erreicht p den Wert 0,5 Millionen, gelten die Fliegen als ausgerottet. Bestimmen Sie diesen Zeitpunkt näherungsweise aus Ihrer Zeichnung. (6 BE)
Maßstab auf der t-Achse: 1 cm $\hat{=}$ 5 Tage,
Maßstab auf der p-Achse: 1 cm $\hat{=}$ 1 Million Fliegen.

3.5 Die durchschnittliche Population $\overline{p}$ über einen Zeitraum $[t_1; t_2]$ beträgt
$$\overline{p} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt.$$
Im Folgenden soll $\overline{p}$ über den Zeitraum $[15; 35]$ geschätzt werden: Markieren Sie dazu ein geeignetes Flächenstück in der Zeichnung aus Teilaufgabe 3.4. Schätzen Sie die Maßzahl A dieses Flächenstücks aus der Zeichnung heraus ab und berechnen Sie damit einen Näherungswert für $\overline{p}$. (4 BE)